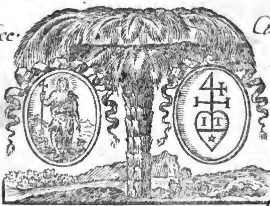
DIOPHANTI

DIOPHANTI REDIVIVI,

PARS PRIOR.

IN QVA, NON CASV, VT putatum eſt, ſed certiſſimâ methodo, & analyſi ſubtiliore, innumera enodantur Problemata, quæ Triangulum Rectangulum ſpectant.

Authore P. IACOBO DE BILLY, *Compendienſi Societatis* IESV.



LVGDVNI,

Apud IOANNEM THIOLY, vico Mercatorio, ſub ſigno Palmæ.

M. DC. LXX.

Cum Approbatione & Permiſſu Superiorum.

LECTORI BENEVOLO.

SVSPICABERIS forsitan, Amice Lector, ex inspectione Tituli nostri rediisse ab Inferis Diophantum, & eum, qui à multis retrò sæculis mortuus est, revixisse: neque prorsùs te tua decipiet suspicio; plurimi siquidem à ducentis præsertim annis, per totam Europam extiterunt celebres Analystæ, qui novis inventis nomen suum fecerunt immortale, ac illam artem, quæ diù jacuerat in sepulchro, suscitârunt. Enumera Cardanos Tartaleas, Clavios, Vietas, Bachetos, Fermatios, & alios plu-

res

res, qui etiamnùm ſunt in vivis: illos omnes ſi quis vocaverit Diophantos, is, meo quidem judicio, ne hilum quidem aberrabit à veritate. Ego minimus inter eos, pervulgatis ante aliquot annos multis problematibus, crebrò impulſus ſum ab intimis meis, ac penè coactus, ut quæ mihi eſſent propria, facerem publici juris: diu reſtiti, fateor: ac ut iis viſum eſt, plus quàm deceret: neque enim is mihi videbar, qui poſſem pro merito tantum nomen ſuſtinere: tamen, cùm illi identidem urgerent, ne differrem, dedi tandem manus, & cœpi exiſtimare, me nullam huic ſcientiæ irrogaturum injuriam, ſi quæ ſcripſi in tenebris, committerem luci. Tu, mi Lector, iis fruere, & ſi quæ errata in tantam numerorum congeriem irrepſerint, corrige.

Monitum ſingulare.

Vnum eſt, quod fortaſſis in hoc opere remorari

remorari posset Lectorem : compendium videlicèt , quo utor in omnibus fermè operationibus, ubi termini occurrunt æquandi quadratis : tunc enim indico duntaxat latus quadrati , cui terminus ille æquandus erit , nec ipsum scribo quadratum , quod facile per latus inveniri potest solius multiplicationis beneficio. Supplebit igitur studiosus Lector hoc compendium, adhibendo manum calamo , ac lateris indicati accipiendo quadratum , ipsúmque æquando illi termino , de quo agitur.

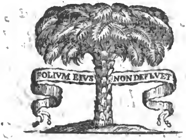
Exemplum primum : *In primo Ploblemate Capitis primi , invenitur terminus* $1QQ + 4C + 6Q + 36N + 17$, *æquandus quadrato , tùm jubetur fingi latus quadrati* $1Q + 2N + 1$, *(prima particula hujus lateris* $1Q$ *est radix quadrata* $1QQ$ *in priori termino existentis , secunda particula* $2N$ *est dimidium quotientis facti ex divisione* $4C$ *in termino priori existentis , per radicem mox positam* $1Q$ *, fit enim*

per divisionem $4N$, *cujus dimidium est* $2N$. *Tertia denique particula lateris* 1 , *est dimidium quotientis facti ex divisione differentiæ* $6Q$ *in priori termino existentis, &* $4Q$ *quadrati secundæ particulæ lateris, per primam particulam , differentia enim* $6Q$ *&* $4Q$ *est* $2Q$, *quæ si dividatur per primam particulam* $1Q$, *dat* 2 , *cujus dimidium est* 1 :) *quadratum autem istius lateris est* $1QQ + 4C + 6Q + 4N + 1$, *quod æquari debet priori termino, utrobique tollendo particulas æquales , & sic restabit numerus* $36N + 17$ *æquandus* $4N + 1$. *Quoniam autem prior numerus major est posteriori , valor Radicis erit minor nihilo , nam supererit tandem* $32N + 16$ *æqualis* 0. *Et quia qui ab æqualibus æqualia tollit , relinquit æqualia , si auferatur utrinque* 16 , *fiet* $32N$ *æqualis* $-- 16$. *Ergo dividendo* $-- 16$ *per* 32 (*numerum videlicet Radicum,*) *fit valor* $-- \frac{1}{2}$. *ut ibi explicatur.*

Exem

Exemplum secundum: *In eodem Problemate primo, reperitur terminus* 1 QQ + 4C + 6Q + 260N + 1 *æquandus quadrato: ac jubetur fingi latus* 1 + 130N -- 1Q. (*adverte in isto termino priori tàm numerum Quadrato-quadratorum, quàm Vnitatum, esse quadratum, ac proinde posse fingi sex latera, ut expungantur tres particulæ, sed istud quod elegi, aptissimum est ad rem, de quâ agitur:*) *hujus autem lateris quadratum est* 1 + 260N + 16898Q - 260C + 1QQ, *quod si æquetur priori termino, per expunctionem particularum æqualium, supererit* 16898Q -- 260C *æqualis* 6Q + 4C, *additísque & demptis æqualibus, fit* 4223Q *æqualis* 66C. *Quoniam igitur numeri illi sunt collaterales, & simplices, dividendo numerum Quadratorum per numerum cuborum, fit valor unius Radicis* $\frac{4223}{66}$. *Non addo plura exempla, quia idem est de reliquis omnibus.*

Hoc instructus monito singulari, poteris per vada & syrtes nostræ Analyseos tutus progredi, ac tandem ad portum feliciter pervenire.



DIOPHAN

DIOPHANTI REDIVIVI,

PARS PRIOR.

In quâ, non caſu, ut putatum eſt, ſed certiſſimâ methodo, & analyſi ſubtiliore, innumera enodantur Problemata, quæ Triangulum Rectangulum ſpectant.

TRIANGVLVM Rectangulum in numeris vocamus illud, in quo quadrata minorum laterum ſimul juncta æquantur quadrato majoris lateris. Iſtud porrò majus latus ap-

 pellatur

pellatur hypotenusa:minora autem latera dicuntur latera circa rectum angulum. Exemplum habes in tribus numeris sequentibus: 12.5.13. qui efficiunt triangulum rectangulũ, quia quadrata minorum laterum 144 & 25 æquantur quadrato 169, quod est quadratum majoris lateris 13. In triangulo rectangulo, aduertenda potissimùm est Area, quæ semper habetur, multiplicando unum ex minoribus lateribus, per dimidium alterius: vt in proposito triangulo 12. 5. 13. Area est 30, quia minus latus 5 per semissem alterius 6, multiplicatum, facit 30. Formari autem potest triangulum rectangulum ex duobus quibuscumque numeris, etenim summa quadratorum ab illis numeris ortorum, exhibebit majus latus, seu hypotenusam: differentia eorumdem quadratorum dabit unum ex lateribus circa rectum: duplus verò illorum productus exhibebit alterum. Res clara erit in exemplo, nam si dentur 4 & 5, accipies eorum quadrata 16 & 25, quorum summa 41 exhibet hypotenusam trianguli: eorumdem quadratorum differentia 9 dat vnum latus circa rectum: denique 40, qui est duplus productus datorum numerorum, præbet tertium latus: atque

ità

ità habetur triangulũ rectangulum 41.9.40, formatum à duobus numeris 4 & 5. Cæterùm quod diximus de numeris integris, debet quoque intelligi de fractis, imò & de cossicis, quod adnotasse, operæ pretium erit. Possem hîc innumera, quæ circa hanc materiam eruditè pertractata sunt ab Authoribus, tum antiquis, tum etiam recentioribus, in vnam veluti massam compendio redigere : sed ne actum agam, nostra duntaxat profero, & horum censuram ab Analystis expecto.

CAPUT PRIMUM.

Complectens Problemata singularia, quæ aream Trianguli Rectanguli spectant.

PROBLEMA I.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area dupla singulis lateribus detracta, relinquat quadratos.

FORMETUR temere triangulum quæsitum ab 1 N + 1 & 2. Latera erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N -- 3. 4 N + 4. Ducatur hypotenusa 1 Q + 2 N + 5 in summam duorum aliorum laterum 1 Q + 6 N + 1, productus est 1 QQ + 8 C + 18 Q + 32 N + 5, vnde si tollas duplam aream 4 C + 12 Q -- 4 N -- 12 relinquuntur 1 QQ + 4 C + 6 Q + 36 N + 17 æquanda

æquanda quadrato. Finge latus iſtius quadrati 1 Q + 2 N + 1 (ut expungantur tres priores particulæ prioris numeri, & relinquatur æquatio inter numeros collaterales) & quadratus hujus lateris æquetur numero præcedenti, fiétque valor Radicis -- $\frac{1}{2}$. Quare numeri formantes 1 N + 1 & 2. in integris erunt 1 & 4. & triangulum inde formatum 17. -- 15. 8. & ſatisfacit quæſtioni.

Sed quoniam nolumus in iſtiuſmodi ſolutionibus numeros fictos & nihilo minores, ut habeantur numeri veri, redintegranda erit operatio, & formandum triangulum, non jam temerè, ſed certò ex 1 N + 1 & 4, ut poſt imperatas operationes numerus unitatum ſit quadratus: Latera trianguli erunt 1 Q + 2 N + 17. 1 Q + 2 N -- 15. 8 N + 8. Si igitur hypotenuſa 1 Q + 2 N + 17 ducatur in ſummam reliquorum laterum 1 Q + 10 N -- 7, & productus 1 QQ + 12 C + 30 Q + 156 N -- 119 multetur duplâ areâ 8 C + 24 Q -- 104 N -- 120, reſiduum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 260 N + 1 æquandum erit quadrato. Finge latus 1 + 130 N -- 1 Q, & fiet valor Radicis $\frac{4223}{66}$. Ergo numeri formantes

 triangu-

triangulum 1 N + 1 & 4 erunt in integris 4289 & 264, & triangulum specie 18465217. 18325825. 2264592. cujus si singula latera dividantur per summam duorum minorum laterum 20590417, habebitur triangulum quæsitum, nempè

$$\frac{18465217.\ 18325825.\ 2264592.}{20590417.}$$

APPENDIX.

Ratio praxeos pendet à 3. 2. Euclidis, quæ sic habet. *Si recta linea secta sit utcumque: rectangulum sub totâ & uno segmentorum ejus comprehensum, æquale est illi quod sub segmentis comprehenditur rectangulo, & illi quod à prædicto segmento fit quadrato.* Hoc etiam in numeris demonstratur à Clavio. Hinc solves sequens Problema. *Invenire Triangulum rectangulum, in quo areâ octuplâ detractâ tribus lateribus sigillatim, relinquantur quadrati.* Si enim intacta retineantur latera trianguli specie, & quadrupletur denominator, habebis pro denominatore 82361668, & satisfiet quæstioni.

Hoc Problema proposui omnibus Mathematicis Galliæ, missúmque est in Angliam, Hollandiam, Germaniam, & alias Europæ partes, nullúsque

que dedit solutionem, præter D. Ozanam mihi in paucis charum, & miræ sagacitatis virum, Lugduni Matheseos Professorem.

PROBLEMA II.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dupla area addita hypothenusæ, & subtracta duobus lateribus circa rectum sigillatim, faciat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes triangulum quæsitum 1 N + 2 & 1. Latera erunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Deinde multiplicetur hypotenusa 1 Q + 4 N + 5 per summam laterum circa rectum 1 Q + 6 N + 7, & producto 1 QQ + 10 C + 36 Q + 58 N + 35 adde duplam arçam 2 C + 12 Q + 22 N + 12, fiétque productus 1 QQ + 12 C + 48 Q + 80 N + 47 æquandus quadrato. Finge latus quadrati 1 Q + 6 N + 6, & extabit valor Radicis $-\frac{11}{8}$. Igitur numeri formantes triangulum erunt

erunt 5 & 8. & triangulum quæsitum 89. -- 39. 80.

Verùm quia non lubet uti numeris fictis, redintegra operationem, & pone tutò pro numeris formantibus triangulum 1 N + 5 & 8. Latera hujus trianguli erunt 1 Q + 10 N + 89. 1 Q + 10 N -- 39. 16 N + 80. Deinde hypotenusam 1 Q + 10 N + 89 duc in summam reliquorum laterum 1 Q + 26 N + 41, & producto 1 QQ + 36 C + 390 Q + 2724 N + 3649 adde duplam aream 16 C + 240 Q + 176 N -- 3120, fiétque aggregatum 1 QQ + 52 C + 630 Q + 2900 N + 529 æquandum quadrato. Finge latus hujus quadrati 23 + $\frac{1450}{23}$ N -- 1 Q, & invenies valorem Radicis $\frac{426}{23}$: ac proinde numeri formantes triangulum 1 N + 5 & 8, erunt in integris 541 & 184. Ex his autem formatur triangulum 326537. 258825. 199088, cujus si singula latera dividantur per 457913 (summa est duorum minorum laterum) habebitur triangulum quæsitum, nempè $\frac{326537.\ 258825.\ 199088.}{457913}$

PROBLE

PROBLEMA III.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo dupla area addita uni lateri, multata autem quadruplo reliquorum laterum, faciat quadratos.

MIro modo hîc procedam, quærendo contraria iis quæ postulantur: perinde enim hîc progrediar, ac si quæreretur Triangulum rectangulum, in quo dupla area multata uno latere, addita autem quadruplo reliquorum laterum, deberet efficere quadratos.

Sint igitur numeri formantes triangulum 1 N + 1 & 2. (temerè illos assumo, ut suprà.) Latera erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N -- 3. 4 N + 4. Deinde quadrantem tertij lateris tollo ab secundo latere, ut fiat 1 Q + 1 N -- 4, quem duco in quadruplum hypotenusæ 4 Q + 8 N + 20, & fit productus 4 QQ + 12 C + 12 Q -- 12 N -- 80. Huic addenda est dupla area 4 C + 12 Q -- 4 N -- 12, & fit summa

ma 4 QQ + 16 C + 24 Q -- 16 N -- 92 æquanda quadrato. Finge latus 2 Q + 4 N + 2, & fit valor -- 3. Ergo numeri formantes, qui fuêre 1 N + 1 & 2, erunt -- 2 & 2.

Redintegranda est igitur operatio, & ponendi tutò numeri formantes triangulum 1 N -- 2 & 2. Latera trianguli sunt 1 Q -- 4 N + 8. 1 Q -- 4 N. 4 N -- 8. Tolle quadrantem tertij lateris, à secundo latere, ut fiat 1 Q -- 5 N + 2, quem duc in quadruplum hypotenusæ 4 Q -- 16 N + 32, productúsque 4 QQ -- 36 C + 120 Q -- 192 N + 64, augeatur duplâ areâ 4 C -- 24 Q + 32 N, fiétque summa 4 QQ -- 32 C + 96 Q -- 160 N + 64. æquanda quadrato. Finge primò latus 8 -- 10 N -- $\frac{1}{4}$ Q, & fit valor $\frac{592}{63}$, & triangulum 233032, 201280, 117432, modò supponatur denominator communis 171922 pro solutione quæstionis assumptæ ad inventionem Problematis quæsiti. Deinde finge latus 8 -- 10 N + 2 Q, & fit valor $\frac{9}{2}$. Ergo 1 N -- 2 & 2, erunt in integris 5 & 4, ex quibus formatur triangulum 41. 9. 40. Si autem quadrans tertij lateris tollatur à secundo latere, relinquitur -- 1, per quem si dividas singu-

la

la latera, habebis triangulum quod satisfacit posteriori quæstioni. Sed quia nolumus numeros fictos, tollendo hinc divisorem, satisfiet quæsito priori per triangulum 41. 9. 40.

PROBLEMA IV.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo si area ducatur in tres numeros Geometricè proportionales, & unus productus addatur uni lateri circa rectum, secundus multetur altero, tertius autem tollatur ab hypotenusâ, fiant quadrati.

POnantur numeri formantes triangulum 1 N + 1 & 2. Latera sunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N -- 3. 4 N + 4. Quadrans tertij lateris 1 N + 1 detrahatur à secundo latere, & relinquitur 1 Q + 1 N -- 4, qui ductus in hypotenusam 1 Q + 2 N + 5, facit 1 QQ + 3 C + 3 Q -- 3 N -- 20. Hinc tolle aream 2 C + 6 Q -- 2 N -- 6, fiétque 1 QQ + 1 C -- 3 Q -- 1 N -- 14, æquandus quadrato. Finge latus 1 Q

1 Q + $\frac{1}{2}$ N -- $\frac{13}{8}$, & fiet valor Radicis $\frac{213}{8}$. Vnde numeri formantes triangulum, qui positi sunt 1 N + 1 & 2, erunt in minimis, & in integris, 221 & 16 : Ex his igitur formabitur triangulum specie 49097. 48585. 7072. cujus si singula latera dividantur per 46817 (residuum est, quod fit tollendo quadrantem tertij lateris à secundo,) fit triangulum quæsitum. Etenim si secundum latus addatur producto ex areâ in $\frac{1}{2}$, tertium latus tollatur producto ex areâ in 2, hypotenusa autem multetur producto ex areâ in 1, fient quadrati. Tres autem illi 2. 1. $\frac{1}{2}$ sunt Geometricè proportionales. Erit igitur triangulum quæsitum $\frac{49097.\ 48585.\ 7072}{46817}$.

APPENDIX.

Ratio hujus praxeos pendet ab hoc Theoremate. *Si duorum quorumcumque numerorum quadrans unius tollatur ab altero, ac per residuum dividantur duo illi numeri : productus quotientium multatus numero cujus quadrans sublatus est, & quadrans producti illorum additus alteri quotienti, exhibebunt quadratos.*

PRO

PROBLEMA V.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo dupla area multata uno latere, & addita sigillatim reliquis lateribus, faciat quadratos.

Ponantur temerè duo numeri formantes triangulum 1 N + 4 & 1. Latera erunt 1 Q + 8 N + 17. 1 Q + 8 N + 15. 2 N + 8. Per differentiam duorum laterum posteriorum 1 Q + 6 N + 7, multiplicetur hypotenusa 1 Q + 8 N + 17, & producto 1 QQ + 14 C + 72 Q + 158 N + 119 addatur dupla area 2 C + 24 Q + 94 N + 120, summáque 1 QQ + 16 C + 96 Q + 252 N + 239, æquetur quadrato. Finge latus istius quadrati 1 Q + 8 N + 16, fiétque valor Radicis $-\frac{17}{4}$, ac proinde 1 N + 4 & 1, erunt in integris -- 1, & 4.

Quare iteranda est operatio, & tutò assumendi 1 N -- 1 & 4, pro numeris formantibus triangul. Latera sunt 1 Q -- 2 N + 17

+ 17. 1 Q -- 2 N -- 15. 8 N -- 8. Differentia laterum circa rectū est 1 Q -- 10 N -- 7. Hanc si ducas in hypotenusam 1 Q -- 2 N + 17, & producto 1 QQ -- 12 C + 30 Q -- 156 N -- 119 addas duplam aream 8 C -- 24 Q -- 104 N + 120, fit summa 1 QQ -- 4 C + 6 Q -- 260 N + 1 æquanda quadrato. Finge latus 1 -- 130 N + 1 Q, & extabit valor Radicis 66. Igitur numeri formantes erunt 65 & 4, triangulúmque specie 4241. 4209. 520. cujus si singula latera dividantur per differentiam laterum circa rectum 3689, habetur triangulum quæsitum, nempè $\frac{4241.4209.520}{3689}$.

APPENDIX.

Ratio istius praxeos fundatur in hoc Theoremate. *Si duo numeri dividantur per illorum differentiam: productus quotientium auctus majore quotiente, & multatus minore, exhibebit quadratos.*

PRO

PROBLEMA VI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo duplâ areâ additâ uni lateri circa rectum, & multatâ quolibet ex reliquis, fiant quadrati.

FOrmetur hoc triangulum primò temerè, ut jam non semel factum est, deinde certò ab 1 N + 4 & 1. Latera sunt 1 Q + 8 N + 17. 1 Q + 8 N + 15. 2 N + 8. Differentia laterum circa rectum est 1 Q + 6 N + 7, in quam si ducatur hypotenusa 1 Q + 8 N + 17, & productus 1 QQ + 14 C + 72 Q + 158 N + 119 tollatur à duplâ areâ 2 C + 24 Q + 94 N + 120, residuum 1 -- 64 N -- 48 Q -- 12 C -- 1 QQ debet æquari quadrato. Finge latus hujus quadrati 1 -- 32 N -- 536 Q, & fit valor -- $\frac{34316}{287297}$, proindéque numeri formantes qui positi sunt 1 N + 4 & 1, erunt in integris 1114872 & 287297. Ex his duobus formatur triãg. specie 1325479142593. 1160400010175. 640598761968 : cujus si singula latera dividantur per

519801248207, (differentia est laterum circa rectum) habebitur triangulum quæsitum. $\frac{1325479142593.\ 1160400010175.\ 640598761968.}{519801248207.}$

APPENDIX.

Si singula latera trianguli 17. 15. 8. dividas per 7, fiet alterum triangulum satisfaciens quæstioni. Vt igitur reddatur difficilior hæc quæstio, petendum erit triangulum alterius speciei à triangulo 17. 15. 8. in quo tres conditiones postulatæ deprehendantur. Ratio praxeos est eadem, quæ in præcedenti.

PROBLEMA VII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo duplâ areâ additâ majori lateri circa rectum, & multatâ minore, & detractâ hypotenusæ, fiant quadrati.

SVmantur temerè pro numeris formantibus triangulum 1 N + 4 & 1. Latera sunt 1 Q + 8 N + 17. 1 Q + 8 N + 15. 2 N + 8. Differentia laterum circa rectum est 1 Q + 6 N + 7, quæ ducta in hypotenusam

tenusam 1 Q + 8 N + 17, facit productum 1 QQ + 14 C + 72 Q + 158 N + 119, unde si tollatur dupla area 2 C + 24 Q + 94 N + 120, residuum 1 QQ + 12 C + 48 Q + 64 N -- 1 æquari debet quadrato. Finge latus 1 Q + 6 N + 6, & fiet valor Radicis -- $\frac{37}{8}$: proindéque numeri formantes qui fuêre 1 N + 4 & 1, erunt in integris -- 5 & 8.

Quare tutò poni possunt numeri formantes triangulum 1 N -- 5 & 8. Latera erunt 1 Q -- 10 N + 89. 1 Q -- 10 N -- 39. 16 N -- 80. Differentia laterum circa rectum est 1 Q -- 26 N + 41, quæ ducta in hypotenusam 1 Q -- 10 N + 89, facit 1 QQ -- 36 C + 390 Q -- 2724 N + 3649, unde si tollas duplam aream 16 C -- 240 Q + 176 N + 3120, residuum 1 QQ -- 52 C + 630 Q -- 2900 N + 529 æquandum est quadrato. Finge latus 23 -- $\frac{1450}{23}$ N + 1 Q, & fit valor Radicis $\frac{1793564}{39192}$. Ergo 1 N -- 5 & 8, seu numeri formantes, erunt in integris, & minimis, 399401 & 78384. ac triangulum specie 165665210257. 153377107345. 62613295968. Itaque si quodlibet ex his lateribus dividatur per differentiam laterum circa rectum

9076381 1377, habebitur triangulum quæsitum $\frac{165665210257.\ 153377107345.\ 62613295968}{9076381 1377}$.

P R O B L E M A VIII.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo duplâ areâ cuilibet laterum circa rectum, & eorum summæ detractâ, fiant quadrati.

Ponantur temerè quicumque numeri formantes triangulum, vt suprà, & invenietur certò ex analysi ponendos esse 1 N + 1 & 4 (vt post operationes peractas relinquatur numerus unitatum quadratus.) Latera sunt 1 Q + 2 N + 17. 1 Q + 2 N — 15. 8 N + 8. Summa laterum circa rectum est 1 Q + 10 N — 7, ex cujus quadrato 1 QQ + 20 C + 86 Q + 140 N + 49, debet tolli dupla area 8 C + 24 Q — 104 N — 120, & residuum, 1 QQ + 12 C + 62 Q — 36 N + 169 æquandum est quadrato. Finge latus 13 — $\frac{18}{13}$ N + $\frac{5077}{2197}$ Q, & fit valor Radicis $\frac{462553}{109110}$. Igitur 1 N + 1 & 4, qui erant numeri formantes

mantes triangulum, erunt in integris 571663 & 436440. Hinc formatur triangulum ſpecie 517278459169. 1363187111969. 498993199440. cujus ſingulis lateribus ſi ſupponas 635311911409. (Summa eſt duorum minorum laterum) fiet triangulum quæſitum, videlicèt

$$\frac{517278459169.\ 1363187111969.\ 498993199440.}{635311911409}$$

APPENDIX.

Sic potuit enunciari aliter iſtud Problema. *Invenire duos numeros, quorum quadrata ſimul ſumpta faciant quadratum, & quorum productus à quolibet eorum, & ab illorum ſummâ ſubtractus faciat quadratos.*

PROBLEMA IX.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo dupla area detracta ſigillatim utrique lateri circa rectum, faciat quadratos: addita autem illorum ſummæ, faciat rurſus quadratum.

POnantur temerè numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1. Triangulum

B 3 erit

erit 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Summa laterum circa rectum est 1 Q + 6 N + 7, cujus quadrato 1 QQ + 12 C + 50 Q + 84 N + 49 si addatur dupla area 2 C + 12 Q + 22 N + 12, fiet 1 QQ + 14 C + 62 Q + 106 N + 61 æquandus quadrato. Finge latus 1 Q + 7 N + $\frac{1}{2}$, & fit valor -- $\frac{5}{4}$. Igitur numeri formantes Triangulum 1 N + 2 & 1, erunt 3 & 4.

Redintegranda igitur est operatio, & formandum triangulum ab 1 N + 3 & 4. Latera erunt 1 Q + 6 N + 25. 1 Q + 6 N -- 7. 8 N + 24. Summa laterum circa rectum est 1 Q + 14 N + 17, cujus quadrato 1 QQ + 28 C + 230 Q + 476 N + 289 si addas 8 C + 72 Q + 88 N -- 168, quæ est dupla area, fiet 1 QQ + 36 C + 302 Q + 564 N + 121 æquandus quadrato. Finge latus 1 Q + 18 N + 11, & fit valor $\frac{42}{11}$. Ergo numeri formantes triangulum in integris erunt 75 & 44, à quibus formatur triangulum specie 7561. 3689. 6600. Singulis lateribus suppone 10289 (summa est laterum circa rectum) & habebis triangulum quæsitum, scilicèt $\frac{7561.\ 3689.\ 6600.}{10289}$.

APPEN

APPENDIX.

Sic potuit enunciari Problema : *Invenire duos numeros, quorum quadrata ſimul addita faciant quadratum, & quorum productus à quolibet illorum ſublatus, ac ſummæ adiectus faciat quadratos.*

PROBLEMA X.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum, & ſummæ duorum minorum ſit quadratus, dupla autem area detracta utrilibet lateri circa rectum faciat quadratos.

Ponantur duo latera circa rectum 1 N & 1 — 1 N, ſic enim & ſumma laterum circa rectum quadrata eſt : & dupla area cuilibet ex iſtis lateribus detracta facit quatum. Quare ſupereſt vt 1 -- 2 N + 2 Q (ſumma videlicèt quadratorum à duobus illis lateribus ortorum) & 1 -- 1 N æquentur quadratis. In iſtâ autem duplicatâ æqua-

litate valor est $\frac{40}{49}$ igitur triangulum specie est 41. 9. 40. quorum latera divisa per 49 exhibent triangulum quaesitum $\frac{41.\ 9.\ 40}{49}$.

Si postularetur autem Problematis solutio per triangulum diuersae speciei à 41. 9. 40. sic procederes. Ponendo numeros formantes triangulum 1 N + 2 & 4. Latera sunt 1 Q + 4 N Q 20. 1 Q + 4 N -- 12. 8 N + 16. Summa laterum circa rectum est 1 Q + 12 N 4, postremum autem latus est 8 N + 16. Quoniam autem vtrobique numerus unitatum quadratus est, habetur valor Radicis $\frac{2480}{441}$. Ergo numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 4, erunt in integris 1681 & 882, unde formatur triangulum specie 3603685. 2047837. 2965284. cujus singula latera si dividantur per 5013121, (summa est laterum circa rectum) fiet triangulum quaesitum, nempè $\frac{3603685.\ 2047837.\ 2965284}{5013121}$

A P P E N D I X.

Potuit sic enuntiari Problema: *Invenire duos numeros, quorum unus, & summa eorum, & summa quadratorum ab illis, faciat quadratos: atque insuper producto illorum sublato ab utrolibet illorum, fiant quadrati.*

PRO

PROBLEMA XI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si area dupla detrahatur sigillatim lateribus circa rectum: ipsa autem multetur differentiâ laterum, fiant quadrati.

FAcilis eſt hæc quæſtio, ſi enim ponantur latera circa rectum 1 N & 1 -- 1 N, erit area dupla 1 N -- 1 Q, quæ ſubtracta ab alterutro, exhibet quadratos infinitè. Reſtat ergo ut differentia laterum 2 N -- 1 ſubtracta à duplâ areâ relinquat quadratum 1 -- 1 N -- 1 Q, prætereà ſumma quadratorum ab illis 1 -- 2 N + 2 Q æquari debet quadrato, & fit valor ex illâ duplicatâ æqualitate $\frac{72}{137}$. Igitur trianguli 72. 65. 97 ſingula latera diviſa per 137, exhibent triangulum quæſitum $\frac{72.65.97}{139.}$..

Quòd ſi poſtuletur exhiberi aliud triangulum ſpecie quàm 72. 65. 97. ità operaberis. Ponantur temerè pro numeris formantibus triangulum 1 N + 1 & 2. Latera erunt

erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N -- 3. 4 N + 4. Tolle secundum latus à tertio, & fiet differentia -- 1 Q + 2 N + 7, quam si ducas in summam laterum circa rectum 1 Q + 6 N + 1, habebis productum -- 1 QQ -- 4 C + 18 QQ + 44 N + 7, quem si tollas de duplâ areâ 4 C + 12 Q + 20 N -- 12, fiet 1 QQ + 8 C -- 6 Q -- 48 N -- 19 quadrato æquandus. Finge latus 1 Q + 4 N -- 11, & extabit valor $\frac{7}{2}$. Igitur numeri formantes 1 N + 1 & 2, erunt 9 & 4.

Iteranda igitur est operatio, & ponendi numeri formantes triangulum 1 N + 9 & 4. Latera invenientur 1 Q + 18 N + 97. 1 Q + 18 N + 65. 8 N + 72. Tolle secundum latus à tertio, differentia est -- 1 Q -- 10 N + 7, quam si ducas in summam laterum circa rectum, extabit productus -- 1 QQ -- 36 C -- 390 Q -- 1188 N + 959. Hunc si tollas à duplâ areâ 8 C + 216 Q + 1816 N + 4680, relinquetur 1 QQ + 44 C + 606 Q + 3004 N + 3721 æquandus quadrato. Finge latus 61 + $\frac{1502}{61}$ N -- 1 Q, & fiet valor Radicis $\frac{113221}{86742}$. Ergo numeri formantes triangulum 1 N + 9 & 4, erunt in

in integris 667457 & 346968. Hinc formabis triangulum ſpecie, cujus ſingula latera per ſummam laterum circa rectum diviſa, dabunt triangulum quæſitum, nempè $\frac{566073001873.\ 124924691825.\ 463172244072}{528097132577}$.

PROBLEMA XII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo areâ detractâ hypotenuſæ, & minori lateri circa rectum, & dimidio tertij lateris, relinquantur quadrati.

Ponantur temerè 1 N + 3 & 2 pro numeris formantibus triangulum. Latera erunt 1 Q + 6 N + 13. 1 Q + 6 N + 5. 4 N + 12. Dimidium tertij lateris 2 N + 6 junge ſecundo 1 Q + 6 N + 5, & ſummam inde natam 1 Q + 8 N + 11 duc in hypotenuſam, productus erit 1 QQ + 14 C + 72 Q + 170 N + 143, unde ſi tollas aream 2 C + 18 Q + 46 N + 30, relinquitur 1 QQ + 12 C + 54 Q + 124 N + 113 æquandus quadrato. Finge latus iſtius quadrati 1 Q + 6 N + 9, &

+ 9, & fit valor -- 2. Igitur numeri formantes 1 N + 3 & 2 erunt 1 & 2.

Quare tutò poni possunt 1 N + 1 & 2, pro numeris formantibus triangulum, latera enim erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N -- 3. 4 N + 4. Dimidium tertij lateris 2 N + 2 junctum secundo 1 Q + 2 N -- 3 exhibet summam 1 Q + 4 N -- 1, quam si ducas in hypotenusam 1 Q + 2 N + 5, extabit productus 1 QQ + 6 C + 12 Q + 18 N -- 5. Hinc tolle aream 2 C + 6 Q -- 2 N -- 6, & fit residuum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 20 N + 1 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 2 N -- 1, & fit valor -- 6.

Cape igitur pro novâ Radice 1 N -- 6, & juxta hanc resolve singulas particulas numeri mox quadrato æquati 1 QQ + 4 C + 6 Q + 20 N + 1, habebísque 1 QQ -- 20 C + 150 Q -- 484 N + 529 æquandum quadrato. Finge latus 23 -- $\frac{242}{23}$ N + $\frac{10393}{12167}$ Q, & fit valor $\frac{299735632}{40021440}$. Hinc tolle 6, ob novam Radicem 1 N -- 6, habebísque numerum $\frac{59606992}{40021440}$ pro valore primarum positionum 1 N + 1 & 2. Igitur numeri formantes triangulum specie, erunt in integris & minimis 6226777 & 5002680:

triangu-

triangulum autem inde formatum est 637995589901 29. 13745944625329, 623011455 24720, cujus si singula latera dividantur per 448965 17387689 (summa est ex secundo latere & dimidio tertij) fiet triangulum quæsitum,

$$\frac{637995589901 20.\ 13745944625329.\ 62301145524720.}{448965173876 89.}$$

APPENDIX.

Demonstratio præcedentis praxeos pendet ex hoc Theoremate : ***Si sint duo quicumque numeri, & dimidium unius addatur alteri, atque per hanc summam dividatur quilibet illorum, dimidius eorum productus sublatus ab uno quotiente, & à dimidio alterius qaotientis, relinquet quadratos.***

PRO

PROBLEMA XIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area addita hypotenusæ, detracta autem ab uno latere circa rectum, & à dimidio alterius, faciat quadratos.

POnantur numeri formantes temerè 1 N + 1 & 4. Latera sunt 1 Q + 2 N + 17. 1 Q + 2 N -- 15. 8 N + 8. Dimidium tertij 4 N + 4 adde secundo 1 Q + 2 N -- 15, & summam 1 Q + 6 N -- 11 duc in hypotenusam, productóque 1 QQ + 8 C + 18 Q + 80 N -- 187, adde aream 4 C + 12 Q -- 52 N -- 60, & aggregatum 1 QQ + 12 C + 30 Q + 28 N -- 247, æquetur quadrato per fictionem lateris 1 Q + 6 N -- 3, fiétque valor Radicis 4. Igitur 1 N + 1 & 4, erunt 5 & 4, ex quibus si formes triangulum specie, habebis 41. 9. 40. cujus singula latera divisa per 29 (summa est ex secundo latere, & dimidio tertij) fit triangulum quæsitum $\frac{41.\,9.\,40}{29}$

PRO

PROBLEMA XIV.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo areâ subtractâ ab uno latere circa rectum, & à dimidio alterius, & à differentiâ extremorum, relinquantur quadrati.

Formetur triangulum, ut in præcedente ab 1 N + 1 & 4. Latera sunt eadem, differentia extremorum 1 Q — 6 N + 9 ducatur in 1 Q + 6 N — 11, & productus 1 QQ — 38 Q + 120 N — 99, multetur areâ 4 C + 12 Q — 52 N — 60, residuúmque 1 QQ — 4 C — 50 Q + 172 N — 39 quadrato æquetur, fingendo latus 1 Q — 2 N — 27. & fiet valor 12. Ergo 1 N + 1 & 4. erunt 13 & 4, & triangulum specie inde formatum 185.153.104. Hujus singula latera dividantur per 205 (summa est ex secundo latere & dimidio tertij) habebitúrque triangulum postulatum, nimirùm $\frac{185.153.104}{205}$.

Potuit formari triangulum ab 1 N + 1, sed

ſed eligo interdum quoſdam numeros, ad vitandas fractiones.

PROBLEMA XV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area ſublata ab uno latere circa rectum, & à dimidio alterius, & à ſummâ duorum extremorum, relinquat quadratos.

FOrmetur temerè illud triangulum ab 1 N + 2 & 1. Latera erunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Summa laterum extremorum eſt 1 Q + 6 Q + 9 : Summa verò ex ſecundo latere & dimidio tertij eſt 1 Q + 5 N + 5. Horum productus 1 QQ + 11 C + 44 Q + 75 N + 45 multatus areâ 1 C + 6 Q + 11 N + 6, relinquit 1 QQ + 10 C + 38 Q + 64 N + 39, æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 5 N + $\frac{13}{2}$, & fit valor -- $\frac{11}{4}$. Igitur numeri formantes 1 N + 2 & 1 erunt in integris -- 5 & 4.

Quare ponendi tutò numeri formantes triangu

triangulum 1 N -- 5 & 4, (ut poſt omnes operationes peractas, numerus unitatum ſit quadratus.) Latera erunt 1 Q -- 10 N + 41. 1 Q -- 10 N + 9. 8 N -- 40. Summa extremorum eſt 1 Q -- 2 N + 1 quam ſi ducas in 1 Q -- 6 N -- 11 (ſumma eſt ex ſecundo & dimidio tertij) fit productus 1 QQ -- 8 C + 2 Q + 16 N -- 11. Hinc tolle aream 4 C -- 60 Q + 236 N -- 180, reſiduum 1 QQ -- 12 C + 62 Q -- 220 N + 169 æquari debet quadrato. Finge latus 13 -- $\frac{110}{13}$ N -- $\frac{811}{2197}$ Q, & fit pro valore fractio $\frac{1376167}{65142}$. Igitur numeri formantes triangulum, qui poſiti ſunt 2 N -- 5 & 4, erunt in integris 1050457 & 260568, & triangulum ſpecie 1171355591473. 105564226225. 547430959152. cujus latera ſingula ſi dividantur per 1309279705801, (ſumma eſt ex ſecundo & dimidio tertij lateris conflata) habebitur triangulum quæſitum, nempè

$$\frac{1171355591473. \quad 105564226225. \quad 547430959152.}{1309279705801.}$$

C PRO

PROBLEMA XVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si unum latus circa rectum, & semisses tum alterius lateris circa rectum, tum hypotenusæ, multentur areâ, relinquantur quadrati.

Formetur triangulum temerè ab 1 N + 2 & 1. Latera ſunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Summa ex tertio latere & dimidio ſecundi eſt 1 Q + 8 N + 11 ſuppoſito denominatore 2, quam ſi ducas in ſemiſſem hypotenuſæ, habetur productus 1 QQ + 12 C + 48 Q + 84 N + 55 ſuppoſito denominatore 4. Inde ſi tollas aream 1 C + 6 Q + 11 N + 6, reſtat 1 Q + 8 C + 24 Q + 40 N + 31 cum denominatore 4, cùm autem denominator ſit quadratus, ſufficit numeratorem 1 Q + 8 C + 24 Q + 40 N + 31 æquare quadrato. Finge latus 1 Q + 4 N + 4, & fit valor $-\frac{15}{8}$. Ergo 1 N + 2 & 1 erunt 1 & 8.

Pone

Pone igitur pro numeris formantibus triangulum, non jam temerè, ſed certò, 1 N + 1 & 8. Latera ſunt 1 Q + 2 N + 65. 1 Q + 2 N − 63. 16 N + 16. Summa ex tertio latere & dimidio ſecundi eſt ſemiſſis 1 Q + 34 N − 31. quem ſi ducas in ſemiſſem hypotenuſæ, fit productus æqualis quadranti numeri ſequentis 1 QQ + 36 C + 102 Q + 2148 N − 2015. ex quo ſi tollas aream 8 C + 24 Q − 488 N − 504, reſidui numerator 1 QQ 4 + 4 C + 6 Q + 4100 N + 1 eſt æquandus quadrato. Finge latus 1 + 2050 − 1 Q, & fit valor $\frac{1050623}{1026}$. Igitur juxta poſitiones 1 N + 1 & 8 erunt in integris 1051649 & 8208: proinde triangulum ſpecie hinc formatum erit 1106032990465. 1105898247937. 17263869984, cujus ſi ſingula latera dividantur per tertium dimidio ſecundi junctum, habebitur triangulum quæſitum, ſcilicèt $\frac{2212065980930.\ 2211796495874.\ 34527739968}{2140425987905}$.

PROBLEMA XVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si unum latus circa rectum, & semissis alterius, & duplum hypotenusæ multentur areâ, restent quadrati.

POne numeros formantes 1 N + 2 & 1. Latera trianguli erunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Duplum hypotenusæ 2 Q + 8 N + 10 duc in tertium plus dimidio secundi, productus erit 1 Q Q + 12 C + 48 Q + 84 N + 55, unde si tollas aream 1 C + 6 Q + 11 N + 6, relinquitur 1 Q Q + 11 C + 42 Q + 73 N + 49 æquandus quadrato. Finge latus 7 + $\frac{73}{14}$ N + $\frac{2903}{2744}$ Q, & fit pro valore radicis, fractio − $\frac{247352}{879873}$. Igitur numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1, erunt in integris 1548394. & 897873. Hinc formatur triangulum specie 3203699903365. 1591348055107. 2780522331924. cujus quidem trianguli si singula latera dividantur per tertium latus plus

plus dimidio ſecundi, fiet triangulum quæſitum $\frac{6407399806730.\ 3182696112014.\ 5561044663848.}{7152392718955}$.

PROBLEMA XVIII.

Invenire Triangulum rectangulum diverſæ ſpeciei à primo omnium triangulorum, in quo ſi ab uno latere circa rectum, & à dimidio alterius, & à quadrante hypotenuſæ tollatur area, reſtent quadrati.

POſtulatum eſt triangulum diverſæ ſpeciei ab 4. 3. 5. quia niſi adderetur iſta conditio, facilè ſolveretur Problema, ſiquidem iſtius trianguli, ſingula latera diviſa per 5, exhiberent triangulum quod ſatisfaceret.

Formetur itaque triangulum quæſitum ab 2 N + 4 & 2. Latera erunt 4 Q + 16 N + 20. 4 Q + 16 N + 12. 8 N + 16. Quadrans hypotenuſæ eſt 1 Q + 4 N + 5, qui ductus in 4 Q + 20 N + 20 (ſumma eſt ex ſecundo plus dimi-

 dio

dio tertij) facit 4 QQ + 36 C + 120 Q + 180 N + 100; unde si tollatur area 16 C + 96 Q + 176 N + 96, superest 4 QQ + 20 C + 24 Q + 4 N + 4 æquandus quadrato. Finge latus 2 + 1 N + $\frac{23}{4}$ Q, & fit pro valore Radicis, fractio $\frac{136}{465}$. Ergo juxta positiones numeri formantes triangulum 2 N + 4 & 2, erunt in integris 2132 & 930. Hinc formatur triangulum specie 5410324. 3680524. 3965520. cujus si singula latera dividantur per 5663284 (summa est ex secundo latere & dimidio tertij, fit triangulum quæsitum $\frac{5410324.\ 3680524.\ 3965520}{5663284}$.

APPENDIX.

Potuit Problema sic enuntiari: *Invenire triangulum rectangulum diuersæ speciei à primo, in quo si singula latera ducantur in tres numeros Geometricè proportionales, & à productis tollatur area, restent quadrati: etenim vnitas, semißis vnitatis, & quadrans sunt in Geometricâ proportione.*

PRO

PROBLEMA XIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area aucta duobus majoribus lateribus, & multata dimidio minoris, faciat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1. Latera sunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Dimidium tertij lateris est 1 N + 2, quod subtractum à secundo 1 Q + 4 N + 3, relinquit 1 Q + 3 N + 1. Per hoc residuum multiplica hypotenusam 1 Q + 4 N + 5, & fit productus 1 Q Q + 7 C + 18 Q + 19 N + 5, cui si addas aream 1 C + 6 Q + 11 N + 6, fit summa 1 Q Q + 8 C + 24 Q + 30 N + 11 æquanda quadrato. Finge latus 1 Q + 4 N + 4, & extabit valor — $\frac{5}{2}$. Igitur 1 N + 2 & 1 erunt in integris — 1 & 2.

Quare tutò pones pro numeris formantibus triangulum 1 N — 1 & 2 (vt nu-

C 4 merus

merus unitatum post additionem imperatam, fiat quadratus,) latera enim erunt 1 Q -- 2 N + 5. 1 Q -- 2 N -- 3. 4 N -- 4. Dimidium tertij lateris est 2 N -- 2, quod sublatum à secundo 1 Q -- 2 N -- 3, relinquit 1 Q -- 4 N -- 1. Istud residuum duc in hypotenusam 1 Q -- 2 N + 5, & producto 1 QQ -- 6 C + 12 Q -- 18 N -- 5, adde aream 2 C -- 6 Q -- 2 N + 6, fiétque summa 1 QQ -- 4 C + 6 Q -- 20 N + 1 æquanda quadrato. Finge latus 1 -- 10 N + 1 Q, & fit valor 6. Igitur 1 N -- 1 & 2 erunt 5 & 2 : unde formatur triangulum 29. 21. 20. cujus si singula latera dividantur per 11 (residuum istud habetur subtrahendo dimidium tertij lateris ex secundo) extabit triangulum postulatum $\frac{29.\ 21.\ 20}{11}$.

APPENDIX.

Demonstratio praxeos pendet ex hoc Theoremate. *Si sint duo numeri quicumque, & dimidium unius tollatur ex alio, ac per residuum dividatur vtérque sigillatim, dimidius productus eorum additus uni, & multatus semisse alterius, exhibebit quadratos.*

Vides

Vides per hoc noſtrum Problema ſolvi Quæſtionem 17. libri 6. Diophanti, & quidem cum adjectâ conditione quæ auget difficultatem.

PROBLEMA XX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo ſi area multetur hypotenusâ, & uno latere circa rectum, augeatur autem ſemiſſe alterius lateris, fiant quadrati.

VTor in hoc opus, ſolutione præcedenti, ubi inventus eſt valor 6, pro numero 1 QQ -- 4 C + 6 Q -- 20 N + 1. & pono pro novâ Radice 1 N + 6, & juxta eam reſolvo ſingulas particulas præcedentis numeri, ſic enim fit 1 QQ + 20 C + 150 Q + 484 N + 529 æquandus quadrato. Finge latus 23 + $\frac{242}{23}$ N -- 1 Q, & fit pro novo valore -- $\frac{45120}{21712}$. Igitur 1 N + 6 erit $\frac{5322}{1357}$. proindéque cum in præcedenti Problemate numeri formantes fuerint 1 N -- 1 & 2, erunt illi in integris 3965 & 2714. Ex his formatur trian

triangulum ſpecie 23087021. 8355429. 21522020. cujus ſi ſingula latera dividantur per 2405581, ſatisfiet Problemati quæſito. Erit igitur triangulum quæſitum $\frac{23087021.\ 8355429.\ 21522020}{2405581}$.

Adverte hîc analyſim ſubtiliſſimam, etenim propter Theorema præcedentis appendicis, debet tolli ſemiſſis tertij lateris à ſecundo, ſed quia dimidium iſtud eſt majus, relinquitur — 2405581, talis itáque deberet eſſe diviſor, vt duo priora latera addita areæ facerent quadratos, atque inſuper area multata dimidio tertij rurſus quadratum exhiberet: ſed quia expungimus ab iſtiuſmodi quæſtionibus numeros fictos, contraria fiunt vtendo 2405581. pro denominatore, ſine ſigno defectûs.

A P P E N D I X.

Hinc ſolvitur Quæſtio 15. Libri 6. Diophanti, & quidem cum conditione adjectâ, quæ mirum in modum auget difficultatem.

PRO

PROBLEMA XXI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area addita uni lateri circa rectum, & multata dimidio alterius, atque sublata ex hypotenusâ, faciat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1. Latera sunt 1 Q + 4 N + 5: 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Dimidium tertij lateris est 1 N +, quod subtractum à secundo, relinquit 1 Q + 3 N + 1, in quem si ducas hypotenusam, fit productus 1 QQ + 7 C + 18 Q + 19 N + 5, cui si detrahas aream 1 C + 6 Q + 11 N + 6, relinquitur 1 QQ + 6 C + 12 Q + 8 N -- 1, æquandus quadrato. Finge latus 1 Q + 3 N + $\frac{3}{2}$, & fit valor -- $\frac{13}{4}$ & numeri formantes -- 5 & 4.

Pono igitur nunc, non temerè, sed certò pro numeris formantibus triangulum 1 N -- 5 & 4 (vt post subtractionem imperatam, numerus unitatum sit quadratus.)

Latera

Latera erunt 1 Q -- 10 N + 41. 1 Q -- 10 N + 9. 8 N -- 40. Dimidium tertij lateris est 4 N -- 20, quod si tollas à secundo, relinquitur 1 Q -- 14 N + 29. Hoc residuum duc in hypotenusam 1 Q -- 10 N + 41, & fit productus 1 QQ -- 24 C + 210 Q -- 864 N + 1189, unde si tollas aream 4 C -- 60 Q + 236 N -- 180, fit residuum 1 QQ -- 28 C + 270 Q -- 1100 N + 1369, æquandum quadrato.

Finge latus 37 -- $\frac{550}{37}$ N + 1 Q, & fit valor Radicis $\frac{534}{37}$. Igitur numeri formantes triangulum erunt in integris & minimis, 349 & 148. Hinc verò formatur triangulum, cujus singula latera divisa per 48245 (est intervallum quo secundus numerus superat dimidium tertij) fit triangulum quæsitum $\frac{143705.\ 99897.\ 103304.}{48245.}$

Fingi potest aliud latus quadrati numero superiori æquandi, ut expungantur tres illius particulæ posteriores, & invenientur numeri formantes 220300313 & 89944824, unde extabit triangulum specie 5662229927228894 5. 40442156543506993. 39629745759859824. cujus si singula latera dividantur per 20627283663577081, fiet

fiet aliud triangulum satisfaciens quæstioni, nempè

$$\frac{566222992722889 45.404421565425 06993.396297457598 59824.}{206272863635770 81.}$$

PROBLEMA XXII.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo area multata dimidio unius lateris circa rectum, & aucta altero, ac summâ illorum, faciat quadratos.

POnantur numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1. Latera erunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Summa laterum circa rectum est 1 Q + 6 N + 7, quæ ducta in 1 Q + 3 N + 1 (numerus iste est intervallum, quo secundum latus superat semissem tertij) facit productum 1 QQ + 9 C + 26 Q + 27 N + 7: huic adde aream 1 C + 6 Q + 11 N + 16, fitque 1 QQ + 10 C + 32 Q + 38 N + 13, æquandus quadrato. Finge latus 1 Q + 5 N + $\frac{7}{2}$, & fit valor $-\frac{1}{4}$. Igitur 1 N + 2 & 1, erunt in integris 7 & 4, ex quibus formabitur triangulum 65. 33. 56.

56, quorum si singula latera dividantur per 5, (seu per intervallum quo 33 superat semissem tertij) fit triangulum quæsitum $\frac{65.33.56.}{5}$

Aliter. Pone latera circa rectum 2 N & 1, ac dimidium prioris tollatur à posteriore, ut residuum sit 1 -- 1 N, quod ducatur in illorum summam 1 + 2 N, & producitur 1 + 2 N -- 2 Q æquandus quadrato, sicut & 1 + 4 Q (summa est quadratorum ab illis ortorum.) In hâc duplicatâ æqualitate facilè invenitur valor, & per valorem fit idem triangulum quod suprà.

APPENDIX.

Potuit Problema sic enunciari: *Invenire duos numeros, quorum quadrata faciant quadratum, & quorum productus dimidius semisse unius lateris circa rectum multatus, & altero auctus, ac illorum aggregato, faciat quadratos.*

PRO

PROBLEMA XXIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area multata dimidio unius lateris circa rectum, & alteri addita, ac differentiæ eorumdem detracta, faciat quadratos.

POnantur numeri formantes triangulum 1 N -- 3 & 4. Latera sunt 1 Q -- 6 N 6 + 25. 1 Q -- N -- 7. 8 N -- 24. Dimidium tertij lateris 4 N -- 12 subtractum à secundo 1 Q -- 6 N -- 7, relinquit 1 Q -- 10 N + 5, quod si ducas in differentiam duorum laterum circa rectum, 1 Q -- 14 N + 17, fit productus 1 QQ -- 24 C + 162 Q -- 240 N + 85, unde si tollas aream 4 C -- 36 Q + 44 N + 84, residuum 1 QQ -- 28 C + 198 Q -- 284 N + 1 erit æquandum quadrato. Finge latus 1 -- 142 N + 1 Q, & habebis 78 pro valore Radicis. Ergo 1 N -- 3 & 4, sunt 75 & 4. Hinc formabis triangulum 5641. 5609. 600. cujus si singula

gula latera dividantur per 5309. (seu per id quo secundum latus superat dimidium tertij) fiet triangulum postulatum $\frac{5641.\ 5609.\ 600}{5309.}$.

Aliter. Ponantur latera circa rectum 8 N & 1 + 1 N, Area erit 4 N + 4 Q, & intervallum quo secundum latus superat dimidium tertij 1 -- 3 N, quod ductum in differentiam laterum 1 -- 7 N facit 1 -- 10 N + 21 Q, hinc tolle aream mox inventam, fitque 1 -- 14 N + 17 Q æquandus quadrato, sicuti etiam summa quadratorum ab illis ortorum 1 + 2 N + 65 Q. atque ex hâc duplicatâ æqualitate fit valor $\frac{3}{4}$. Igitur triangulum quæsitum est 24. 7. 25. (cujus singula latera dividi debent per -- 5.) At nos nolumus fictos numeros, igitur convertendo in signum pluris, fiet triangulum 24. 7. 25. (supposito denominatore communi + 5) in quo secundum latus detractum ab areâ & dimidium primi additum areæ, & differentia laterum circa rectum aucta & multata areâ faciunt quadradratos. Erit igitur triangulum quæsitum $\frac{23.7.25}{5}$.

APPEN

APPENDIX.

Potuit sic enunciari Problema: *Invenire duos numeros, quorum quadrata faciant quadratum, & quorum dimidius productus dimidio unius multatus, & additus alteri, & detractus differentiæ eorumdem, faciat quadratos.*

PROBLEMA XXIV.

Invenire Triangulum Rectangulum, in quo area addita uni lateri circa rectum, & multata dimidio alterius, ac sublata ab illorum summâ, faciat quadratos.

Ponantur numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1. Latera sunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Dimidium tertij lateris 1 N + 2 sublatum à secundo, relinquit 1 Q + 3 N + 1, quem si ducas in summam laterum circa rectum, 1 Q + 6 N + 7, fit productus 1 QQ + 9 C + 26 Q + 27 N + 7,

$+ 7$, unde areâ $1 C + 6 Q + 11 N + 6$ detractâ, relinquitur $1 QQ + 8 C + 20 Q + 16 N + 1$ æquandus quadrato. Finge latus $1 + 8 N - 22 Q$, & fiet valor $\frac{120}{161}$. Igitur numeri formantes triangulum erunt in integris 442, & 161, & triangulum specie 221285. 169443. 142324. cujus si singula latera dividantur per 98281 (seu intervallum quo secundum latus superat semissem tertij) habebitur triangulum quæsitum $\frac{221285.\ 169443.\ 142324}{98281}$.

APPENDIX.

Potest ita enunciari Problema : *Invenire duos numeros, quorum quadrata faciant quadratum, & quorum dimidius productus multatus semisse vnius lateris circa rectum, & auctus altero, atque eorum summa detractus, faciat quadratos.*

PRO

PROBLEMA XXV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area addita hypotenusæ, & multata uno latere circa rectum, & adjecta dimidio tertij lateris, faciat quadratos.

Miro modo procedam in enodatione istius Problematis: Ponantur enim numeri formantes triangulum 2 & 1 -- 1 N. Latera erunt 5 -- 2 N + 1 Q. 3 + 2 N -- 1 Q. 4 -- 4 N. Dimidium tertij lateris 2 -- 2 N tollatur à secundo, residuum est 1 + 4 N -- 1 Q, quod si ducas in hypotenusam 5 -- 2 N + 1 Q, productus erit 5 + 18 N -- 12 Q + 6 C -- 1 QQ. Hunc tolle ex areâ 6 -- 2 N -- 6 Q + 2 C, & residuum 1 -- 20 N + 6 Q -- 4 C + 1 QQ debet æquari quadrato. Finge latus hujus quadrati 1 -- 10 N -- 47 Q, & fit pro valore, -- $\frac{944}{2208}$. Ergo numeri formantes triangulum 2 & 1 -- 1 N erunt in integris & minimis 276 & 197: unde formabis more solito triangulum

gulum 114985. 37375. 108744. Quoniam autem dimidium tertij lateris majus est secundo latere integro, si illud ab isto subtrahatur, fit numerus fictus -- 17005 pro denominatore communi. Igitur tollendo signum defectûs, & ponendo pro denominatore communi + 17005, solvetur Problema, & triangulum quæsitum erit

$$\frac{114985.\ 37375.\ 108744.}{17005.}$$

APPENDIX.

Fingendo latus 1 -- 10 N + 1 Q, invenisses valorem 6: igitur numeri formantes fuissent 2 & -- 5, ac proinde si sumantur numeri formantes 2 & 1 N -- 5, erunt latera 29 -- 10 N + 1 Q. -- 21 + 10 N -- 1 Q. -- 30 + 4 N. Dimidium tertij lateris tollatur ex secundo; & residuum -- 11 + 8 N -- 1 Q ducatur in hypotenusam, fit productus -- 319 + 342 N -- 120 Q + 18 C -- 1 QQ. qui sublatus ex areâ 210 -- 142 N + 30 Q -- 2 C, dat residuum 529 -- 484 N + 150 Q -- 20 C + 1 QQ æquandum quadrato. Finge latus 1 Q -- 10 N + 23. Fit valor 6. Et numeri formantes 2 & 1. & triangulum 5. 3. 4. in

4. in quo contraria præcedenti contingunt, nam si area multetur hypotenusâ, fit quadratus 1. Si secundum latus addatur areæ, fit quadratus 9. Si dimidium tertij lateris detrahatur areæ, fit quadratus 4. Et hæc quidem ità fiunt, quia dimidium tertij lateris minus est secundo latere, contra quam accidit in superiore.

PROBLEMA XXVI.

Invenire Triangulum rectangulum, diversæ speciei à 5. 3. 4. in quo areâ additâ uni lateri circa rectum, & duplo hypotenusæ, & multata dimidio tertij, faciat quadratos.

Formetur triangulum ab 1 N + 3 & 2. Latera erunt 1 Q + 6 N + 13. 1 Q + 6 N + 5. 4 N + 12. Tertij lateris dimidium est 2 N + 6, quod subtractum à secundo, facit 1 Q + 4 N -- 1. Per hoc residuum si multiplices hypotenusam duplam 2 Q + 12 N + 26, fiet productus 2 QQ + 20 C + 72 Q + 92 N -- 26, qui

 addi

additus areæ 2 C + 18 Q + 46 N + 36, facit 2 QQ + 22 C + 90 Q + 138 N + 4, æquandum quadrato. Finge latus 2 + $\frac{69}{2}$ N -- $\frac{4401}{16}$ Q, & fit pro valore, fractio $\frac{44864336}{1936289}$. Igitur numeri formantes triangulum 1 N + 3 & 2, erunt 62969203 & 38736578, & triangulum specie 5465643001605293. 2464598051305125. 4878422887214668. cujus si singula latera dividantur per 25386607697791 (intervallum est quo secundum latus superat semissem tertij) fiet triangulum postulatum.

$$\frac{5465643001605293.\ 2464598051305125.\ 4878422887214668.}{25386607697791}$$

PROBLEMA XXVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area addita hypotenusæ, & multata uno latere circa rectum, & addita dimidio alterius, faciat quadratos.

Accipio triangulum 5. 3. 4. in quo omnia postulata secùs complicata quadratos

tos faciunt (nam area multata hîc maximo latere, & aucta minimo, & multata dimidio reliqui, efficit quadratos.) Hujus singula latera duco in 1 N -- 1, fiúntque 5 N -- 5. 3 N -- 3. 4 N -- 4. Productus primus additus cum 6 (area eſt trianguli accepti,) facit 5 N + 1. Secundus ex 6 ſublatus, 9 -- 3 N. Dimidium tertij additum 6 facit 2 N + 4. Hos tres multiplica inter ſe ſolidè, & productum 36 + 186 N + 24 Q -- 30 C æqua quadrato, fingendo latus 6 + $\frac{31}{2}$ N -- $\frac{865}{48}$ Q, fiétque pro valore Radicis, $\frac{48780}{29929}$. Ex iſtâ fractione tolle unitatem, ob 1 N -- 1, ac per reſiduum divide ſigillatim 5. 3. 4. fiétque triangulum poſtulatum, ſeu triangulum ſpecie 149645. 89787. 119716, cujus ſingula latera dividi debent per 18791. Et ſic habebitur triangulum quæſitum $\frac{149645.\ 89787.\ 119716.}{18791.}$

PROBLEMA XXVIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si area addatur utrilibet lateri circa rectum, & multetur hypotenusâ, fiant quadrati.

Accipio triangulum 12. 16. 20. Hujus singula latera duco in 1 N -- 5, fiúntque producti 12 N -- 60. 16 N -- 80. 20 N -- 100. Aream 96 adde sigillatim duobus prioribus lateribus; & habebis 12 N + 36. 16 N + 16, & ab eâdem areâ tolle tertium latus, residuum erit 196 -- 20 N. Hos tres numeros multiplica solidè, productus erit 112896 + 139008 N + 22272 Q -- 3840 C, æquandus quadrato. Finge latus 336 + $\frac{1448}{7}$ N -- $\frac{31418}{1029}$ Q, & fiet pro valore Radicis $\frac{1093404139}{1233863405}$. Ex hâc fractione tolle 5, ob 1 N -- 5, ac per residuum divide sigillatim 12. 16. 20. habebisque triangulum postulatum $\frac{2961272172. \quad 3948362896. \quad 4935453620}{1093404139}$

PRO

PROBLEMA XXIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si area simplex multetur uno latere, area dupla alio, ac tripla reliquo, restent quadrati.

CErtum eſt triangulum 5. 4. 3. tale eſſe, ut ſi dividantur ſingula ejus latera per ipſius aream 6, ac quotienti primo addatur area ſemel, ſecundo bis, tertio ter, fiat quadratum. Propter hoc, utor iſto triangulo in rem noſtram,& 5,4,3, ſigillatim duco in 1 N -- 6, ut fiant 5 N -- 30. 4 N -- 24. 3 N -- 18. Primum horum productorum tollo de areâ 6, & fit 36 -- 5 N. Secundum de duplâ areâ 12, & fit 36 -- 4 N. Tertium de triplâ areâ 18, & fit 36 -- 3 N. Hæc tria reſidua duco in ſe ſolidè, ac productum 46656 -- 15552 N + 1692 Q -- 60 C æquo quadrato, fingendo latus 216 -- 36 N + $\frac{11}{12}$ Q, fitque pro valore Radicis, $\frac{864}{121}$. Ex iſtâ fractione tollatur 6, ob 1 N -- 6, ac per reſiduum dividantur ſingula latera trianguli propoſiti 5. 4. 3. & habebitur triangulum quæſitum $\frac{605.484.363}{138}$.

PROBLEMA XXX.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus area si multetur hypotenusâ, & altero latere circa rectum, relinquantur quadrati.

HÆc est quæstio 15. libri 6. Diophanti, quæ jam soluta est in Problemate 26. & quam iterum facillimè solvemus ex 19. hujus.

Capiatur enim triangulum specie illic inventum 29. 21. 20. & duo priora latera ducantur sigillatim in 1 N -- 11 : producti sunt 29 N -- 319 & 21 N -- 231. qui tollantur ex 210 (area est capti trianguli) & fiunt duo residua 529 -- 29 N. & 441 -- 21 N, in quibus numeri unitatum sunt quadrati. Igitur per duplicatam æqualitatem vulgarem, invenitur pro valore $\frac{1827}{116}$. Hinc tolle 11, ob 1 N -- 11, ac per residuum divide 29. 21. 20. fiétque triangulum quæsitum $\frac{3364.\ 2436.\ 2320.}{551}$

APPEN

APPENDIX.

Imò ſolvi poteſt 20. hujus aliâ ratione, nam duobus reſiduis ſuprà inventis 529 -- 29 N & 441 -- 21 N, adjungi poteſt 20 N + 100 (ſumma eſt ex area 210, & producto ex 1 N -- 11 in dimidium tertij lateris,) . unde non difficilè reperietur valor 1 N.

PROBLEMA XXXI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo ſi area quadrupla tollatur ex duplo minoris lateris, & ex quadruplo medij, atque etiam ex octuplo hypotenuſæ, relinquantur quadrati.

Formetur triangulum ab 1 N + 2 & 1. Latera ſunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Tùm ſumma ex tertio latere & dimidio ſecundi ducatur in octuplum hypotenuſæ, atque ex producto 4 QQ + 48 C + 192 Q + 336 N + 220

$+$ 220 tollatur quadrupla area 4 C $+$ 24 Q $+$ 44 N $+$ 24, residuúmque 4 QQ $+$ 44 C $+$ 168 Q $+$ 292 N $+$ 196 æquetur quadrato, fingendo, latus 14 $+ \frac{73}{7}$ N $+ \frac{2903}{1732}$ Q, & fiet pro valore $- \frac{147352}{897873}$. Igitur numeri formantes triangulum 1 N $+$ 2 & 1 erunt in integris 1548394. 897873, & triangulum specie 6407399806730. 3182696110214. 5561044663848. cujus si singula latera dividantur per 7152392718955 (summa est ex tertio latere & dimidio secundi) extabit triangulum quæsitum

$$\frac{6407399806730.\ 3182696110214.\ 5561044663848}{7152392718955}.$$

APPENDIX.

Adverte idem hîc peti, ac in 17. hujus, etenim ex eo quòd unum latus circa rectum, & semissis alterius, ac dupla hypotenusa multetur areâ, relinquat quadratos, sequitur quadruplam aream sublatam à duplo unius lateris, & à quadruplo alterius, & ab octuplo hypotenusæ, quadratos relinquere.

PRO

PROBLEMA XXXII.

Invenire quatuor Triangula rectangula diversæ speciei, in quorum quolibet, si à minori latere tollatur area simplex, à duplo medij lateris area quadrupla, & à quadruplo hypotenusæ area sedecupla, relinquantur quadrati.

FOrmetur hoc triangulum vt in præcedenti ab N 1 + 2 & 1. Latera erunt vt suprà, & summa ex medio latere & semisse tertij 1 Q + 5 N + 5 ducatur in quadruplum hypotenusæ 4 Q + 16 N + 20, productus est 4 QQ + 36 C + 120 Q + 180 N + 100, unde si tollas aream sedecuplam 16 C + 96 Q + 176 N + 96, restant 4 QQ + 20 C + 24 Q + 4 N + 4 æquanda quadrato. Finge primò latus 2 + 1 N + 2 Q, & fit valor $\frac{15}{16}$, & numeri formantes 17 & 16, unde triangulum specie 545. 33. 544. cujus si singula latera dividantur per 305, habebitur triangulum quæsitum $\frac{545.\ 33.\ 544}{305}$.

Finge

Finge secundò latus 2 Q + 5 N -- $\frac{1}{4}$, & fit triangulum specie 31841. 10209. 30160. cujus latera si dividantur per 25289 (summa est ex secundo & dimidio tertij) fit rursùs aliud triangulum $\frac{31841.\ 10209.\ 30160}{25289}$.

Finge tertiò 2 + 1 N + $\frac{21\ Q}{4}$, & pro valore, fiet fractio, & inde numeri formantes 1066 & 465. Hinc formatur triangulum specie 1352581. 920131. 991380. cujus latera singula si dividantur per 1415821. (summa est secundi plus dimidio tertij) fit tertium triangulum $\frac{1352581.\ 920131.\ 991380}{1415821}$.

Denique ponantur latera trianguli quæsiti 2 N. 1 -- 1 N. 1. sic enim satisfiet tribus postulatis, nam area 1 N -- 1 Q detracta medio, dat quadratum 1 -- 2 N + 1 Q. Deindè quadrupla area 4 N -- 4 Q subtracta ex primi lateris duplo 4 N dat quadratum 4 Q. Tertiò area sedecupla 16 N -- 16 Q subtracta à quadruplo hypotenusæ 4, dat quadratum 4 -- 16 N + 16 Q. Restat igitur vt summa quadratorum à lateribus circa rectum 1 -- 2 N + 5 Q æquetur quadrato hypotenusæ 1, & fit 1 N æqualis $\frac{2}{5}$, & triangulum $\frac{4}{5}.\frac{3}{5}.\frac{5}{5}$.

PRO

PROBLEMA XXXIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si triplum areæ tollatur ab hypotenusâ, duplum autem tum à medio tum à quadruplo minoris, relinquantur quadrati.

POnantur numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1. Latera sunt 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Quadrans hujus posterioris jungatur medio, & fit summa, quam si ducas in hypotenusam, productus erit 1 Q Q + $\frac{17}{2}$ C + 27 Q + $\frac{77}{2}$ N + 20. Hinc tolle triplum areæ, residuum est 1 Q Q + $\frac{11}{2}$ C + 9 Q $-\frac{11}{2}$ N + 2, æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + $\frac{11}{4}$ N + $\frac{23}{32}$, & pro valore Radicis, fit $\frac{1519}{1584}$. Ergo 1 N + 2 & 1, in integris erunt 1649, & 1584. Hinc formatur triangulum specie 5228257. 210145. 5224032. cujus si singula latera dividantur per 1516153, (summa est ex medio & quadrante tertij) fit triangulum postulatum $\frac{5228257.\ 210145.\ 5224032}{1516153}$.

APPEN

APPENDIX.

Si duorum quorumcumque numerorum primus aſſumat quadrantem ſecundi, ac per iſtam ſummam duo illi dividantur ſigillatim, primus multatus quadrante producti illorum, ſecundus autem multatus producto, exhibebunt quadratos: vel quadruplum primi multatum producto illorum, faciet quadratum. In hoc fundatur demonſtratio praxeos.

Hinc ſi aſſumas triangulum 16.12.20.& primo lateri addas quadrantem ſecundi, ut fiat 19, ac per hanc ſummam dividas ſingula latera, fient 4 complicationes areæ cum lateribus, primum enim latus aſſumens aream & relinquens dimidium areæ, facit quadratos. Secundum autem latus aſſumens aream, & relinquens duplum areæ, rursùs quadratos efficit. Hoc ſequitur partim ex Theoremate prædicto, partim ex Diophanto L.6. Q.13.

PRO

PROBLEMA XXXIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si quadrupla area tollatur ex duplo unius lateris circa rectum, & quadrans areæ ex reliquis lateribus, fiant quadrati.

POnantur numeri formantes triangulum pro libito & temerè 1 N + 4 & 1. Latera sunt 1 Q + 8 N + 17. 1 Q + 8 N + 15. 2 N + 8. Octans tertij lateris additus secundo, facit 1 Q + $\frac{33}{4}$ N + 16, qui ductus in hypotenusam, dat productum 1 QQ + $\frac{65}{4}$ C + 99 Q + $\frac{1073}{4}$ N + 272, unde si tollatur quadrans areæ, residuum 1 QQ + 16 C + 96 Q + $\frac{513}{2}$ + 257 erit æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 8 N + 16, & fit valor -- 2. Igitur 2 & 1, erunt numeri formantes triangulum 5. 3. 4. cujus si singula latera dividantur per secundum latus plus octante tertij, habebis $\frac{10.6.8}{7}$ pro triangulo quæsito.

APPENDIX.

Demonſtratio praxeos fundatur in Theoremate ſequenti : *Si duorum quorumcumque numerorum unus aſſumat octantem alterius , ac per illam ſummam dividantur duo illi numeri ſigillatim , aſſumens multatus octante producti , duplum autem alterius multatum duplo producti, exhibebunt quadratos.*

PROBLEMA XXXV.

Invenire Triangulum rectangulum , in quo quadrans areæ ſublatus de uno latere circa rectum , & quadrupla area detracta duplo alterius , eadem autem quadrupla area adjecta duplo hypotenuſæ , faciat quadratos.

POnantur ut ſuprà numeri formantes triangulum 1 N + 4 & 1. Latera ſunt 1 Q + 8 N + 17. 1 Q + 8 N + 15. 2 N + 8. Deinde octans ſecundi lateris jungatur

jungatur lateri tertio, & ſumma facta ducatur in duplum hypotenuſæ, ut fiat productus $\frac{1}{2}$ QQ + 8 C + 72 Q + 260 N + $\frac{1345}{4}$, huic ſi addas quadruplam aream 4 C + 48 Q + 188 N + 240, & ſummam ducas in 4, habebis 1 QQ + 48 C + 480 Q + 1792 N + 2303, æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 24 N — 48, & fit valor $\frac{1}{409}$. Igitur numeri formantes triangulum 1 N + 4, & 1, erunt in integris 16385 & 4096. Hinc verò formatur triangulum ſpecie 285245441. 251691009. 134225920. cujus ſi ſingula latera dividantur per $\frac{1325498369}{8}$ (ſumma eſt ex latere tertio, & octante ſecundi lateris) extabit triangulum quæſitum, $\frac{2281963521.2013528072.1073807360}{1325498369}$. Demonſtratio praxeos eſt eadem quæ in præcedenti.

PROBLEMA XXXVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area multata dimidio unius lateris circa rectum, addita autem quadruplo utriuslibet ex reliquis lateribus, faciat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes triangulum 1 N + 4 & 1. Latera erunt 1 Q + 8 N + 17. 1 Q + 8 N + 15. 2 N + 8. Deinde octans tertij lateris tollatur ex secundo, ac per residuum multiplicetur quadruplum hypotenusæ, fiétque productus 4 QQ + 63 C + 372 Q + 975 N + 952, cui si addas aream 1 C + 12 Q + 47 N + 60, summa erit 4 QQ + 64 C + 384 Q + 1022 N + 1012 æquanda quadrato. Finge latus 2 Q + 16 N + 32, & fit valor Radicis -- 6, ac numeri formantes triangulum 1 N + 4 & 1, erunt -- 2 & 1.

Quare non jam temerè, sed tutò pro numeris formantibus triangulum quæsitum pones

pones 1 N -- 2 & 1. Latera erunt 1 Q -- 4 N + 5. 1 Q -- 4 N + 3. 2 N -- 4. Tolle octantem tertij lateris de secundo, ac residuum duc in quadruplum hypotenusæ, productus erit 4 QQ -- 33 C + 102 Q -- 141 N + 70. Huic producto adde aream 1 C -- 6 Q + 11 N -- 6, fitque summa 4 QQ -- 32 C + 96 Q -- 130 N + 64, æquanda quadrato. Finge latus 8 -- $\frac{65}{8}$ N + 2 Q, & pro valore Radicis, invenies $\frac{129}{32}$. Hinc tolle 2 (ob 1 N -- 2) & fient numeri formantes triangulum in integris, 65 & 32. Hinc formatur triangulum specie 5249. 3201. 4160. cujus si singula latera dividantur per 2681 (seu per secundum latus multatum octante tertij) extabit triangulum quæsitum $\frac{5249.\ 3201.\ 4160}{2681}$.

APPENDIX.

Si sint duo quicumque numeri, & primus illorum multetur octante secundi, ac per residuum factum dividantur sigillatim duo numeri prædicti: dimidium producti illorum multatum semisse primi, ac duplum producti ejusdem additum secundo, exhibebit quadratos. In hoc fundatur praxis præcedens.

PROBLEMA XXXVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo si areæ duplæ addatur minus latus circa rectum, & subtrahatur majus, hypotenusæ autem adjiciatur simplex area, efficiantur quadrati.

PONatur triangulum 4. 3. 5. in quo contingunt contraria : nam si minus latus tollatur à duplâ areâ, & majus latus circa rectum addatur duplici areæ, & ipsa area multetur hypotenusâ, fiunt quadrati. Ergo 4. 3. 5. duci debent sigillatim in 1 N — 1, producti sunt 4 N — 4. 3 N — 3. 5 N — 5. Minus latus addo duplici areæ 12, & fit 3 N + 9. Deinde 4 N — 4 subtraho à duplici areâ, & fit 16 — 4 N. Denique hypotenusam 5 N — 5 adjicio areæ simplici 6, & fit 5 N + 1. Tres illos numeros recèns natos 3 N + 9. 16 — 4 N. 5 N + 1 duco in se solidè, productus est 144 + 732 N + 84 Q — 60 C æquandus quadrato. Finge latus 12 + $\frac{61}{2}$ N — $\frac{3529}{96}$ Q, & fit pro valore, $\frac{20112864}{12453841}$. Hinc tol-
lo

le unitatem, ac per residuum divide sigillatim 4. 3. 5. & extabit triangulum quæsitum $\frac{49815364.\ 37361523.\ 62269205}{7659023}$.

PROBLEMA XXXVIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area addita majori lateri circa rectum, & multata dimidio alterius, ac differentiâ illorum, faciat quadratos.

ADverte superiùs à nobis inventum esse triangulum 24. 7. 25. cujus si singula latera dividantur per 5, contingunt contraria, iis quæ in nostrâ quæstione postulantur. Quare vtor illo triangulo, & singula latera illius duco in 1 N -- 5, vt fiant 24 N -- 120. 7 N -- 35. 25 N -- 125 Primi producti dimidium 12 N -- 60 tolle ex areâ 84, & fit 144 -- 12 N. Secundum productum 7 N -- 35 addo areæ 84, & fit 7 N + 49. Ac tandem area 84 multata differentiâ duorum minorum productorum 17 N -- 85, facit 169 -- 17 N. Tres itaque numeros ex his operationibus

natos 144 -- 12 N. 7 N + 49. 169 -- 17 N, duco in se solidè, & fit productus 119 2464 -- 48972 N -- 21336 Q + 1428 C æquandus quadrato. Finge latus 1092 -- $\frac{513}{26}$ N -- $\frac{14763025}{147384}$ Q, & fit pro valore $\frac{2135163462545568}{217946907150625}$. Ergo 1 N -- 5 erit $\frac{1045428926792444}{217946907150625}$. Per hanc postremam fractionem si dividas 24. 7. 25. sigillatim, fiet triangulum quæsitum $\frac{5230725771615000.\ 1525628336054375.\ 5448672678755625}{1045428926792443}$.

PROBLEMA XXXIX.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus area sublata ab uno ejus latere circa rectum relinquat numerum datum. Detur numerus 2.

INquiratur primò triangulum rectangulum, in quo areâ ductâ in numerum datum 2, & producto sublato ex quadrato semissis unius lateris, relinquatur quadratum. Formetur illud triangulum temerè ab 1 N -- 1 & 4. Latera sunt 1 Q -- 2 N + 17. 1 Q -- 2 N -- 15. 8 N -- 8. Ejus area 4 C -- 12 Q -- 52 N + 60 ducatur

catur

catur in 2, & productus 8 C -- 24 Q -- 104 N + 120, tollatur ex quadrato semissis secundi lateris, relinquitur quadrans 1 QQ -- 36 C + 70 Q + 476 N -- 255 æquandus quadrato: & omnibus ductis in 4, (vt tollantur fractiones,) fit 1 QQ -- 36 C + 70 Q + 476 N -- 255 quadrato æquandus. Finge latus 1 Q -- 18 N -- 127, & fit pro valore Radicis, -- 4. Quare ponatur pro novâ Radice 1 N -- 4, & juxta illam resolvantur singulæ particulæ numeri, mox quadrato æquati, procreatúrque novus terminus 1 Q -- 52 C + 598 Q -- 2068 N + 1521, quadrato æquandus. Finge latus 39 -- $\frac{1034}{39}$ N + 1 Q, & fit pro valore, $\frac{278236}{1560}$. Ergo 1 N -- 4 erit $\frac{67999}{390}$; proindéque numeri formantes triangulum 1 N -- 1 & 4, erunt in integris 67609. & 1560. Quare triangulum posterius quod inquiritur, erit 4573410481. 4568543281. 210940080. Si enim illius area ducatur in 2, & productus 963688885177602480 tollatur à quadrato semissis secundi lateris, restabit quadratum, cujus latus est $\frac{4125146321}{2}$.

Iam igitur ad rem nostram pono triangulum quod primariò postulatur, esse

4573410481 N. 4568543281 N. 210740080 N. Hujus trianguli area 48184444425888012 40 Q ſublata à latere ſecundo circa rectum, relinquit 4568543281 N
— 4818444442588801240 Q æqualem 2, & fit pro valore Radicis $\frac{5542462}{12046111064720031}$. Ergo ſi hic numerus ducatur in tres poſitiones ſuperiores, extabit triangulum quæſitum $\frac{25347953801344222.\ 25320977530297822.\ 1169127377676960}{12046111064720031}$.

APPENDIX.

Dum numerus relinquendus minor eſt vnitate, nihil facilius eſt, nam formatum triangulum ex duobus numeris componentibus fractionem, erit triangulum ſpecie, quo utendum eſt in enodatione iſtiuſmodi Problematis : vt ſi dentur $\frac{4}{7}$ pro numero relinquendo : ex 7 & 4 formabis triangulum ſpecie 65.33.56. tùm pones triangulum quæſitum 65 N.33 N. 56 N.& area 924 Q tollatur de 56 N, quod eſt tertium latus, reſiduúmque 56 N — 924 Q æquetur $\frac{4}{7}$, fiétque valor $\frac{11}{231}$, & triangulum quæſitum erit $\frac{715.\ 363.\ 616}{231}$.

Quæſtiuncula. *Invenire duo Triangula rectangula*

ctangula in quorum utroque si tollatur area de majore latere circa rectum, relinquatur idem numerus. Latera vnius trianguli sunt $\frac{12.5.13}{10}$. Latera alterius trianguli sunt $\frac{120.\ 19.\ 181}{190}$: ubìque enim relinquuntur $\frac{9}{10}$.

PROBLEMA XL.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area sublata ex summâ laterum circa rectum, relinquatur numerus datus Detur numerus 4.

QVæratur primò triangulum, in quo area ducta in numerum datum, ac producto sublato ex quadrato dimidiæ summæ laterum circa rectum, relinquatur quadratus. Sint latera circa rectum trianguli istius 1 N & 1. Ergo 1 Q + 1 æquatur quadrato (siquidem quadratum hypotenusæ æquatur quadratis aliorum laterum.) Deindè area est $\frac{1}{2}$ N, quam si ducas in numerum datum 4, fit 2 N, quibus subductis de quadrato semissis summæ laterum, relinquitur quadrans numeri sequentis 1

-- 6

-- 6 N + 1 Q æquandus quadrato. Ex hâc duplicatâ æqualitate oritur valor -- $\frac{12}{5}$. Ponatur ergo Radix nova 1 N -- $\frac{12}{5}$, & juxta eam resolvantur 1 Q + 1 & 1 -- 6 N + 1 Q, fiéntque duo termini novi quadrato æquandi, nempè 1 Q -- $\frac{24}{5}$ N + $\frac{169}{25}$, & 1 Q -- $\frac{54}{5}$ + $\frac{529}{25}$, ubi valor est $\frac{7779239}{3031860}$. Igitur 1 N -- $\frac{12}{5}$, seu nova Radix erit $\frac{100555}{606372}$: ideóque posterius triangulum quæsitum erit 606372. 100555. 614653.

Quapropter ad rem nostram ponatur triangulum quæsitum 606372 N. 100555 N. 614653 N. hujus enim trianguli area 30486868230 Q sublata ex summâ laterum circa rectum relinquit 706927 N -- 30486868230 Q æqualem 4, & fit pro valore $\frac{408135}{30486864230}$, ac juxta positiones triangulum quæsitum $\frac{247483636220}{30486868230}$. $\frac{408135}{303186}$. $\frac{250861302155}{30486868230}$.

Si detur numerus relinquendus 2, facilè res fiet; nam omne triangulum rectangulum habens 2 pro uno latere circa rectum, solvet quæstionem.

PRO

PROBLEMA XLI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo summa hypotenusæ & unius lateris circa rectum relinquens aream, faciat numerum datum. Detur numerus 4.

QVærendum est in primis triangulum rectangulum in quo quadratus dimidiæ summæ ex hypotenusâ & uno latere multatus producto ex areâ in numerum datum, relinquat quadratum. Formetur istud ab 1 N + 1 & 1 N. Latera erunt 2 Q + 2 N + 1. 2 N + 1. 2 Q + 2 N. Summa hypotenusæ & lateris sequentis est 2 Q + 4 N + 2. Hujus semissis est 1 Q + 2 N + 1, cujus quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 relinquens 8 C + 12 Q + 4 N (productus est ex areâ in numerum datum) facit 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q − 2 N + 1, & fit pro valore $\frac{1}{4}$. Ergo juxta positiones, 4 & 1 erunt numeri formantes, ac triangulum specie

specie 17. 8. 15. Posito ergo triangulo quæsito 17 N. 8 N. 15 N, si area 60 Q tollatur à 32 N relinquetur 32 N − 60 Q æqualis 4 : & fit $\frac{1}{3}$ pro valore ; ac proinde latera trianguli quæsiti erunt $\frac{17.\,15.\,8.}{3}$.

PROBLEMA XLII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratum hypotenusæ additum dato multiplici areæ, faciat quadratum. Detur duplum areæ.

VNicus videtur hic casus excipiendus, si nimirùm daretur octuplum areæ, cujus quidem rei non est admodùm ardua demonstratio. Formetur ergo triangulum ab 1 N & 1. Igitur latera erunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. Quadratum hypotenusæ est 1 QQ + 2 Q + 1 : duplum autem areæ est 2 C − 2 N. His duobus additis, fit summa 1 QQ + 2 C + 2 Q − 2 N + 1 æquanda quadrato. Finge latus 1 Q + 1 N + $\frac{1}{2}$. Quare pones pro novâ Radice 1 N + $\frac{1}{4}$, juxta quam si resolvantur singulæ

ſingulæ particulæ termini mox æquati quadrato, 1 QQ + 2 C + 2 Q − 2 N + 1, fit novus numerus 1 QQ + 3 C + $\frac{31}{8}$ Q + $\frac{9}{16}$ N + $\frac{169}{256}$ quadrato æquandus. Finge latus ex $\frac{13}{16}$ − $\frac{9}{26}$ N + $\frac{5077}{2197}$ Q, & pro valore Radicis, fiet $\frac{20512544}{20949120}$. Igitur 1 N + $\frac{1}{4}$ erit $\frac{6437453}{5237280}$. Quare numeri formantes triangulum erunt in integris 6437453 & 5277280. Hinc formabitur triangulum quæſitũ 6929048532 5609. 1359111692 8809. 679444839 35680.

PROBLEMA XLIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratum hypotenuſæ multatum dato multiplici areæ faciat quadratum. Detur duplus.

CApe ex præcedenti eoſdem numeros formantes, & eadem latera, deprehendéſque 1 QQ − 2 C + 2 Q + 2 N + 1 æquanda quadrato. Finge latus 1 + 1 N + $\frac{1}{2}$ Q & fiet valor 4. Igitur triangulum quæſitum erit 17. 8. 15.

PRO

PROBLEMA XLIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area detracta quadrato unius lateris circa rectum, faciat quadratum.

FOrmetur illud triangulum temeré ab 1 N -- 1 & 4. Latera erunt 1 Q -- 2 N + 17. 1 Q -- 2 N -- 15. 8 N -- 8. Ejus area 4 C -- 12 Q -- 52 N + 60 sublata ex quadrato hypotenusæ, quod est 1 QQ -- 4 C -- 26 Q + 60 N + 225, relinquit 1 QQ -- 8 C -- 14 Q + 112 N + 165 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q -- 4 N -- 15, & fit valor -- $\frac{15}{2}$. Quare pono intrepridè pro novâ Radice 1 N -- $\frac{15}{2}$, & juxta illam resolvo singulas particulas termini quadrato æquandi; fitque novus numerus 1 QQ -- 38 C + $\frac{1007}{2}$ Q -- $\frac{5431}{2}$ N + $\frac{81225}{16}$, quadrato æquandus. Finge latus 1 Q -- 19 N -- $\frac{285}{4}$, & fit pro valore, $\frac{5423}{285}$. Vnde si tollas $\frac{15}{2}$ ob novam Radicem, fit residuum, quod resolutum juxta 1 N -- 1 & 4, dat pro

pro numeris formantibus in integris 6001 & 2280. Igitur triangulum quæsitum est 41210401. 30813601. 27364560.

APPENDIX.

Quod hîc factum est per detractionem areæ potest fieri per additionem: quod verò fit addendo vel detrahendo aream simplicem, fieri quoque potest de multiplice areâ.

PROBLEMA XLV.

Invenire duo Triangula rectangula, ita ut hypotenusa unius sit æqualis uni lateri circa rectum alterius; & data pars areæ istius posterioris æquetur perimetro prioris. Detur octans areæ.

POnantur temerè numeri formantes primum triangulum 1 N & 1. Latera erunt 1 Q + 1. 1 Q -- 1. 2 N. Sumatur pro hypotenusâ secundi 2 N, ejus quadratum 4 Q debet æquari quadratis laterum

F circa

circa rectum. Igitur quærendi sunt duo numeri quorum quadrata sint æqualia 4 Q; hoc autem fieri potest multis modis. Elige 6 N & 8 N, & vtrumque divide per 5, duo enim illi quotientes habebunt quadrata æqualia 4Q. His autem positis, impossibile est vt areæ, quæ erit vigesima quinta pars 24Q, octans æquetur perimetro prioris 2 Q + 2 N. Quare si aduertas diligenter unde hæc omnia generentur, concludes taliter eligendum esse triangulum secundum, vt area ipsius divisa per datam partem areæ, det quotientem majorem binario, & quaternario minorem: tale autem est triangulum 6.8.10.

Igitur, vt fractiones vitentur, pones primum triangulum 6 N. 8 N. 10 N. Hujus hypotenusa 10 N sumetur pro uno latere circa rectum secundi, eritque secundum triangulum 1 Q + 25. 1 Q — 25. 10 N. (adverte formari ab 1 N & 5, atque hunc numerum 5 esse dimidiam partem hypotenusæ 10.) Restat igitur ut prioris trianguli capiatur octans areæ 3 Q, & æquetur perimetro posterioris 2 Q + 10 N, & fit valor 10. Ergo juxta positiones, primum

mum triangulum erit 100. 60. 80: secundum verò 125. 75. 100 : &, satisfaciunt quæstioni.

Si imperetur centesimam partem areæ unius esse æqualem perimetro alterius, primum triangulum erit $\frac{1903200.\ 348920.\ 1934920}{676}$. Secundum autem $\frac{1934920.\ 859551.\ 2117249}{676}$.

Si jubeatur aream esse æqualem perimetro, ferè eadem erit operatio, quæ suprà: atque triangulum primum erit $\frac{79200.\ 63360.\ 47520}{7744}$: Secundum autem erit $\frac{84825.\ 30375.\ 79200}{7744}$.

Imò facile est invenire duo triangula rectangula; quorum primum habeat unum latus æquale hypotenusæ secundi : area autem secundi ad perimetrum primi habeat datam rationem.

PROBLEMA XLVI.

Invenire duo Triangula rectangula, ita-ut unum latus primi habeat rationem datam ad hypotenusam secundi, & area secundi ad perimetrum primi habeat quoque rationem datam. Prima ratio sit ut 2 *ad* 5 *: secunda ut* 100 *ad* 1.

VT vitentur molestæ fractiones, quærendum est primò triangulum rectangulũ, cujus area divisa per 100 det quotientem majorem 2, & minorem 4 : est 61. 11. 60. Deinde fiat ut 5 ad 2, ità 61 ad aliud, nempè $\frac{122}{5}$; & ponatur primum triangulum 1 Q + $\frac{3721}{25}$. 1 Q — $\frac{3271}{25}$. $\frac{122}{5}$ N : secundum verò triangulum sit 61 N. 11 N. 60 N: sic enim prima ratio jam constat, quia est ut tertium latus primi ad hypotenusam secundi, ità 2 ad 5. Superest ergo vt area secundi trianguli 330 Q, sit centupla 2 Q + $\frac{122}{5}$ N; quod si supponatur, fiet pro valore

ſore $\frac{244}{13}$: Vnde juxta poſitiones triangulum primum erit $\frac{2117249.\ 859551.\ 1934920}{4225}$: ſecundum autem $\frac{14884.\ 2684.\ 14640.}{13}$.

PROBLEMA XLVII.

Invenire duo triangula rectangula, itaut ſumma hypotenuſæ & unius lateris primi trianguli ad aream ſecundi: perimeter ſecundi ad reliquum latus primi: ac denique perimeter primi ad productum ſub hypotenusâ ſecundi in unum ex ſuis lateribus circa rectum, habeat rationem datam. Eſto data prima ratio 1 *ad* 15. *ſecunda* 3 *ad* 1. *tertia* 1 *ad* 30.

ELigatur majoris facilitatis gratiâ aliquod triangulum, cujus area 30 : tale eſt 13. 12. 5. ponatúrque ſecundum triangulum 13 N. 12 N. hujus ſumma eſt 30 N, ergo cùm ſumma hæc ad unum latus primi debeat eſſe ut 3 ad 1, erit unum latus primi 10 N, proindéque commodè poteſt

 poni

poni triangulum primum 1 Q + 25. 1 Q − 25. 10 N. Sic enim primæ rationi satisfit & secundæ. Restat igitur ut perimeter primi 2 Q + 10 N ad productum ex hypotenusâ secundi in 5 N (qui productus est 65 Q) habeat rationem 1 ad 30. Igitur productus sub extremis 60 Q + 300 N æquabitur producto sub mediis 65 Q. Et fit pro valore Radicis 60. Quapropter juxta positiones, primum triangulum erit 3625. 3575. 600. Secundum 780. 300. 720.

PRO

PROBLEMA XLVIII.

Invenire duo Triangula rectangula, ita-ut perimeter primi ad aream secundi: solidum autem sub tribus lateribus secundi ad productum ex uno latere primi in duo reliqua: ac denique unum latus circa rectum primi, ad unum latus circa rectum secundi, habeat rationem datam. Esto prima ratio 1 ad 20. secunda sit ratio æqualitatis: tertia sit 68 ad 1.

ORdior ab hoc tertio postulato, & capio duplum 68 (quia summa duorum laterũ primi erit 2Q) nempè 136. Hic numerus producitur vel ex 136 in 1, vel ex 68 in 2, vel ex 34 in 4, vel ex 17 in 8. Ex his producentibus eligo duos postremos, quia quadratum 17 multatum quadrato 8 relinquit quadratum à latere 15. Propterea pono triangulum secundum 17N. 8N. 15N. Ejus solidum est 2040C. Volo autem, vt

Jam dictum est, summam duorum laterum trianguli primi esse 2 Q: igitur quoniam secunda ratio est æqualitatis, capio pro tertio latere trianguli primi 1020N (1020 semissis est 2040) proinde posito primo triangulo 1 Q + 260100. 1 Q -- 260100. 1020 N, solidum sub tribus lateribus sesecundi æquabitur producto ex summâ duorum priorum laterum primi in tertium. Restat ergo vt perimeter primi 2 Q + 1020 N ad aream secundi 60 Q, sit ut 1 ad 20. Hinc verò sequitur productum sub extremis 40 Q + 20400 N æquari producto sub mediis 60 Q. & fit 1 N æqualis 1020. Vnde juxta positiones primum triangulum erit 1300500. 780300. 1040400 : secundum autem 17340. 15300. 8160.

PRO

PROBLEMA XLIX.

Invenire duo Triangula rectangula, ita ut summa hypotenusæ & unius lateris circa rectum primi ad aream secundi, habeat rationem datam: perimeter autem secundi ad reliquum latus primi, datam etiam habeat rationem: ac denique perimeter primi ad differentiam laterum circa rectum secundi, habeat quoque rationem datam. Esto prima ratio 1 *ad* 15 *secunda* 3 *ad* 1*: tertia* 100 *ad* 1.

EAdem penè ratione procedendum est atque in prioribus operationibus: positóque secundo triangulo 13 N. 12N. 5N. erit primum 1 Q + 25. 1Q -- 25. 10N. ita enim summa duorum priorum laterum primi 2 Q ad aream secundi 30 Q erit vt 1 ad 15. Deinde perimeter secundi 30 N ad reliquum latus primi 10 N est ut 3 ad 1. Superest igitur ut perimeter primi 2 Q

 + 10N

+ 10 N ad differentiam laterum circa rectum secundi 7 N, sit ut 100 ad 1. Hinc autem sequitur productum sub extremis 2 Q + 10 N æquari producto sub mediis 900 N, & fit 1 N æqualis 345. Igitur primum triangulum est 119050. 119000. 3450: secundum verò 4485. 4140. 1725.

PROBLEMA L.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area sublata ex quadrato summæ duorum minorum laterum, relinquat quadratum.

PОnantur duo latera circa rectum 1 N & 1. Igitur area erit $\frac{1}{2}$ N, quæ sublata de quadrato summæ 1 N + 1, quod quadratum est 1 Q + 2 N + 1, relinquit 1 Q + $\frac{3}{2}$ N + 1 æquandum quadrato, sicut & 1 Q + 1, siquidem quadrata laterum circa rectum simul juncta faciunt quadratum hypotenusæ. Ex hâc autem duplicatâ æqualitate per vulgarem methodum Diophanti oritur valor Radicis $-\frac{55}{48}$. Pono ergo pro

pro novâ Radice $1N - \frac{55}{48}$, & juxta eam, reſolvo duos terminos quadrato æquatos, fiúntque novi termini $1Q - \frac{19}{24}N + \frac{1369}{2304}$, & $1Q - \frac{53}{24}N + \frac{5329}{2304}$, æquandi quadrato. Et reductis illis ad eundem unitatum numerum quadratum, fient $\frac{5329}{1369}Q - \frac{101251}{32856}N + \frac{5329}{2304}$, & $1Q - \frac{55}{24}N + \frac{5329}{2304}$. Differentia illorum terminorum quadrato æquandorum eſt $\frac{3960}{1369}Q - \frac{2163}{2378}N$. Hanc differentiam producunt $\frac{36}{37}N$, & $\frac{110}{37}N - \frac{2163}{3664}$, (adverte ſubtilem methodum inveniendi producentes.) Horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus majori ſuperiorum terminorum æquatus, dat pro valore $\frac{7622505}{5250744}$. Ergo nova Radix $1N - \frac{55}{48}$ erit $\frac{39655}{129648}$. Igitur triangulum quæſitum eſt 129648. 39655. 135577.

APPENDIX.

Poteſt ſic enunciari hoc Problema: *Invenire duos numeros quorum quadrata faciant quadratum, & quorum dimidius productus ſublatus à quadrato ſummæ illorum, relinquat quadratum.*

PRO

PROBLEMA LI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum sit cubus, area autem ipsi cubo detracta faciat quadratum.

POnantur latera circa rectum 1 N & 1 (sic enim unum latus cubus est.) Ex eo cubo tolle dimidium producti ab illis lateribus, residuum 1 -- $\frac{1}{2}$N est æquandum quadrato: sicut & 1 Q + 1. Ex hâc verò duplicatâ æqualitate modo consueto resolutâ, oritur -- $\frac{272}{225}$. Quare pono pro novâ Radice 1 N -- $\frac{272}{225}$, & juxta eam resolvo duos numeros quadratis mox æquatos, fiéntque novi termini, quorum primus est $\frac{361}{225}$ -- $\frac{1}{16}$N. Secundus verò 1 Q -- $\frac{544}{225}$ N + $\frac{124509}{50625}$. Quoniam igitur utrobique numerus unitatum est quadratus, per methodum Diophanti eruitur pro valore, $\frac{187917462543}{80970928200}$. Ergo nova Radix 1 N -- $\frac{272}{225}$. erit $\frac{90032607119}{80970928200}$. Ergo triangulum quæsitum est

$$\frac{121087412881.\ 80970928200.\ 90032607119}{8097098200}.$$

APPEN

APPENDIX.

Potuit sic enuntiari Problema : *Invenire duos numeros quorum vnus sit cubus, & quorum quadrata faciant quadratum, ac denique quorum dimidius productus prædicto detractus cubo, relinquat quadratum.*

PROBLEMA LII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum sit cubus, & datus multiplex areæ detractus quadrato summæ laterum circa rectum, faciat quadratum. Detur duplus.

POnantur latera circa rectum 1 & 1 N. Duplum areæ est 1 N, quem si tollas à quadrato 1 + 2 N + 1 Q, restat 1 + 1 N + 1 Q æquandus quadrato, sicut & 1 + 1 Q. & fit valor Radicis ex hâc duplicatâ æqualitate -- $\frac{8}{15}$. Quare pono pro novâ Radice 1 N -- $\frac{8}{15}$, juxta quam resolvo duos terminos quadrato æquatos, & fiunt novi termini

mini quadrato æquandi $1Q - \frac{1}{15}N + \frac{169}{225}$, & $1Q - \frac{16}{15}N - + \frac{289}{225}$. Reducantur ad eundem unitatum quadratum, & fient $\frac{289}{169}Q - \frac{289}{2535}N + \frac{289}{225}$, & $1Q - \frac{16}{15}N + \frac{289}{225}$, quæ ſunt quadratis æquanda. Horum differentia eſt $\frac{120}{169}Q + \frac{161}{169}N$, quam producunt $\frac{30}{13}N$, & $\frac{4}{13}N + \frac{161}{390}$. Ergo horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus majori prædictorum terminorum æquatus, dat pro valore, $\frac{7245}{5304}$. Proindéque triangulum quæſitum eſt $\frac{7245.5304.8979}{5304}$.

A P P E N D I X.

Poteſt quoque addi altera conditio, nempè ut unum latus circa rectum detrahatur eidem quadrato ſummæ laterum, & relinquatur quadratus.

PRO

PROBLEMA LIII.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus unum latus circa rectum sit cubus, & in quo si alterum latus circa rectum, & tres areæ multiplices Geometricè proportionales detrahantur quadrato summæ laterum circa rectum, relinquantur quadrati.

AIo numeros in præcedenti solutione exhibitos solvere quoque præsens Problema: enim verò in omni triangulo rectangulo area quadrupla & octupla ex quadrato summæ laterum circa rectum subtracta relinquit quadratum. Ratio est quia quadrupla area æquatur duplo producto sub lateribus circa rectum, at duplus productus quadrato summæ illorum detractus relinquit quadratum hypotenusæ, quia quadratum hypotenusæ æquatur quadratis laterum circa rectum. Deinde octupla area æquatur quadruplo producto sub lateribus circa rectum, quadruplum

druplum autem iſtius producti cum quadrato differentiæ illorum æquatur quadrato ſummæ illorum ex Euclide. Igitur octupla area quadrato ſummæ detracta relinquit quadratum. Cùm igitur ex ipsâ operatione, & vi analyſeos, dupla area eidem quadrato detracta relinquat quadratum, cúmque dupla area ſit æqualis uni lateri circa rectum, quia alterum latus eſt 1, patet propoſitum circa quinque illa poſtulata.

APPENDIX.

Eodem fermè artificio ſolves ſequens Problema: *Invenire triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum ſit cubus, & duplum alterius lateris cum area quadrupla, octupla, & ſedecupla, quadrato ſummæ laterum circa rectum detracta, relinquant quadratum.* Ponantur enim latera circa rectum 1 & 1 N. Ego ſedecuplum areæ eſt 8 N, quod ſi tollas à quadrato ſummæ laterum circa rectum, relinquitur 1 Q -- 6 N + 1 æquandum quadrato, ſicuti etiam 1 Q + 1: & fit ex hâc duplicatâ æqualitate per methodum vulgarem -- $\frac{12}{5}$. Pono ergò pro novâ Radice 1 N -- $\frac{12}{5}$, & juxta illam reſolvo terminos

terminos mox æquatos quadrato 1 Q + 1 & 1 Q -- 6 N + 1, & fiunt novi termini ad eundẽ unitatum quadratum reducti $\frac{529}{169}$ Q -- $\frac{696}{845}$ N + $\frac{529}{25}$, & 1 Q -- $\frac{54}{5}$ N + $\frac{529}{25}$. Horum differentia est $\frac{360}{169}$ Q -- $\frac{714}{169}$ N, quam producunt $\frac{10}{13}$ N, & $\frac{36}{13}$ N -- $\frac{357}{65}$. Igitur horum producentium summæ semissis quadratus majori ex prædictis terminis æquatus & $\frac{12}{5}$ mulctatus, dat Radicis valorem, pro primis positionibus, $\frac{595}{3588}$, proindéque triangulum quæsitum est $\frac{595. \quad 3588: \quad 3637}{3588}$.

PROBLEMA LIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum sit cubus, si autem duplum, quadruplum, & octuplum areæ, cum simplo duplo & quadruplo alterius lateris circa rectum, quod non est cubus, addantur quadrato differentiæ laterum minorum, fiant quadrata.

POnantur latera circa rectum 1 & 1 + 1 N. Ergo primum latus est cubus:

simplum

ſimplum autem, duplum, & quadruplum alterius lateris æquatur duplo, quadruplo, & octuplo areæ: igitur ſi 1 + 1N. 2 + 2N 4 + 4N addantur 1Q (quadratum eſt differentiæ circa rectum) fient 1Q + 1N + 1. 1Q + 2N + 2. 1Q + 4N + 4, æquandi quadratis. Eſt autem poſtremus illorum terminorum quadratus à latere 1N + 2. Igitur ſuperſunt duo tantùm termini 1Q + 1N + 1. 1Q + 2N + 2 æquandi quadratis. Ex illâ autem æqualitate duplicatâ per methodum Diophanti, fit valor $\frac{7}{8}$. Ergo triangulum quæſitum erit $\frac{8.\,15.\,17}{8}$.

PRO

PROBLEMA LV.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus dupla area cuilibet lateri circa rectum detracta faciat quadratos: & in quo summa illorum laterum ducta vel in summam quadratorum vel in summam cuborum ab illis ortorum, rursùs quadratos efficiant.

POnantur latera circa rectum 1 N & 1 -- 1 N. Quoniam igitur illorum summa est 1, jam sequitur ex Theoremate superiùs allato, productum illorum, seu duplam aream, cuilibet illorum detractam efficere quadratos. Summa quadratorum ab illis est 1 -- 2 N + 2 Q, summa verò cuborum est 1 -- 3 N + 3 Q, quæ si ducantur in 1, non immutant numeros prædictos. Quare illi duntaxat sunt æquandi quadratis. Ex istâ porrò duplicatâ æqualitate oritur valor $\frac{8}{23}$. Ergò juxta positiones, triangulum postulatum est $\frac{8.\ 15.\ 17}{23}$.

PROBLEMA LVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus summæ ex hypotenusâ & uno latere circa rectum auctus dato multiplici areæ, faciat quadratum. Detur quadruplus areæ.

FOnantur numeri formantes triangulum 1 & 1 N. Latera erunt 1 + 1 Q. 1 -- 1 Q. 2 N. Area est 1 N -- 1 C, cujus quadruplum 4N -- 4C additum 4 (quadratum est summæ duorum priorum laterum) facit 4 + 4 N -- 4 C æquandum quadrato. Finge latus 2 + 1 N, & fit valor -- $\frac{1}{4}$. Quare pono pro novâ Radice 1 N -- $\frac{1}{4}$, ac juxta eam resolvo 4 + 4 N -- 4 C, extátque de novo terminus quadrato æquandus $\frac{49}{16}$ + $\frac{13}{4}$N + 3 Q -- 4 C. Finge latus $\frac{13}{14}$N + $\frac{7}{4}$, & extat pro valore, $\frac{419}{784}$. Ergo 1 N -- $\frac{1}{4}$ in integris exhibebit numeros formantes triangulum 784 & 223. & triangulum quæsitum 664385. 564927. 349664.

PRO

PROBLEMA LVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus summe ex hypotenusâ & uno latere circa rectum, multatus dato multiplici areæ, faciat quadratum. Detur multiplex duplus.

POnantur numeri formantes 1 & 1 N. Latera erunt 1 + 1 Q. 1 -- 1 Q. 2 N. Ergo 4 -- 2 N + 2 C æquatur quadrato, & fiunt numeri formantes 8 & 1, & triangulum quæsitum. 65. 63. 16.

Eodem modo si detur tripla area, Triangulum erit 265.247.96. Si quadrupla, triangulum erit 17. 15. 8. Si quintupla, triangulum erit 281. 261. 160.

PROBLEMA LIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo cubus summæ ex hypotenusâ & uno latere circa rectum, multatus dato multiplice areæ, faciat cubum. Detur duodecuplum areæ.

POsitis iisdem, fiet $8 - 12N + 12C$ æquandus cubo. Finge latus $2 - 1N$, & fiet valor Radicis $\frac{6}{13}$: unde formabitur triangulum ex 1 & $\frac{6}{13}$, fiétque triangulum quæsitum $\frac{205.\ 133.\ 156.}{169}$. Si enim ex cubo summæ duorum priorum laterum tollatur duodecuplum areæ, fiet cubus à latere $\frac{260}{169}$.

PROBLEMA LX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo summa laterum circa rectum faciat quadratum cum suo latere, area verò ipsi summæ juncta faciat cubum cum latere.

POnantur latera circa rectum 2 N. & 1 Q -- 1 N. ità enim satisfit primo postulato. Area est 1 C -- 1 Q, quæ si jungatur summæ laterum circa rectum 1 N + 1 Q, facit 1 C + 1 N, qui est cubus cum latere suo. Quare superest ut laterum circa rectum quadrata simul juncta 1 QQ -- 2 C + 5 Q faciant quadratum. Finge latus 1 Q -- 4 N, & fit valor $\frac{11}{6}$, & triangulum quæsitum $\frac{132.\ 55.\ 143}{36}$.

PRO

PROBLEMA LXI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo summa laterum circa rectum faciat quadratum cum triplo sui lateris: area autem intervallo horum laterum addita faciat cubum cum latere suo.

Ponantur latera circa rectum 2 N & 1 Q + 1 N. ita enim satisfit postulato primo. Deinde area 1 C + 1 Q addita 1 N − 1 Q (quod est intervallum laterum) facit 1 C + 1 N, & sic satisfit postulato secundo. Restat igitur ut quadrata horum laterum simul juncta 1 QQ + 2 C + 5 Q faciant quadratum. Finge latus 1 Q + 2 N, & fit valor $\frac{1}{2}$: & triangulum quæsitum $\frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{4}$.

PROBLEMA LXII.

Invenire duo Triangula rectangula, in quorum utroque area sit æqualis perimetro, & unum latus circa rectum sit quadratus cum suo latere, ac duorum reliquorum laterum summa sit quadrato-quadratus cum latere suo.

FOrmetur unum ex duobus illis triangulis ab 1 N & 1: aliud autem ab 1 N & 2. Primum triangulum erit 1 Q + 1. 1 Q -- 1. 2 N. Secundum verò 1 Q + 4. 1 Q -- 4. 4 N. Primi area 1 C -- 1 N æquetur perimetro 2 Q + 2 N, & fit valor Radicis 3. Secundi area 2 C -- 8 N æquetur perimetro 2 Q + 4 N. & fit quoque valor 3. Rursùs tertium latus primi trianguli 2 N æquetur primo numerorum omnium, qui continet quadratum cum suo latere (unitate demptâ, quæ non est numerus, sed principium numeri) qui est 6: & fit valor 3: idémque fiat de tertio latere secundi trianguli 4 N, quod æquetur sequenti numero, qui continet

tinet quadratum cum ſuo latere, nempè 12, & fit 3 pro valore. Denique duo reliqua latera quæ in utroque triangulo faciunt ſummam 2 Q æquentur primo numero qui continet quadrato-quadratum cum ſuo latere (excipio rursùs quadrato-quadratum, quod eſt unitas) ille eſt 18. Ex hâc æquatione fit valor 3. Cùm itaque omnes illæ æquationes dent ſemper 3, pro valore Radicis, triangula quæſita juxta poſitiones, erunt 6. 8. 10. & 12. 5. 13. & ſatisfaciunt quæſtioni.

APPENDIX.

Hinc ſolves Problema ſequens, quod eſt difficillimum. *Invenire Triangulum rectangulum, in quo ſi hypotenuſa tollatur ab areâ, ſecundum latus à ſemiſſe area, & tertium latus ab areâ cum triente, fiant quadrati.*

Hîc duo potiſſimùm ſupponenda ſunt: primum eſt, *quòd ſi duorum numerorum unus multetur quadrante alterius, ac per reſiduum dividatur uterque numerus, quadrans producti illorum additus numero multato, multatus autem quadrante numeri non multati, facit quadratos.* Secundum eſt, *quòd ſi duorum numerorum*

rorum unus multetur duobus trientibus alterius, ac per residuum dividatur uterque numerus: duo trientes producti illorum additi multato numero, multati autem duobus trientibus numeri non multati, faciunt quadratos. Hoc posito fit in triangulo 5. 3. 4. ut si secundum latus multetur quadrante tertij, & tertium latus multetur duobus trientibus secundi remaneat ubique 2. Ergo triangulum rectangulum $\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{4}{2}$ tale est, ut si hypotenusa addatur areæ, & secundum latus semissi areæ, & tertium latus areæ cum triente, fiant quadrati.

Iam igitur, si ad Problema ab initio propositum, ponantur latera trianguli quæsiti $\frac{5}{1N -- 2}$. $\frac{3}{1N -- 2}$. $\frac{4}{1N -- 2}$. & neglectis denominatoribus detrahantur latus primum areæ, & secundum dimidio areæ, & tertium areæ cum triente, fient tria residua 16 -- 5 N. 9 -- 3 N. 16 -- 4 N. æquanda quadratis. Horum igitur trium productus solidus 2304 -- 2064 N + 612 Q -- 60 C debet æquari quadrato. Finge latus 48 -- $\frac{43}{2}$N + $\frac{599}{384}$Q, & fit pro valore $\frac{1045328}{358801}$. Ergo denominator 1 N -- 2 erit $\frac{325726}{358801}$, per quem si dividas 5. 3. 4, fiet triangulum quæsitum $\frac{1794005.\ \ 1076403.\ \ 1435204}{325726}$.

PRO

PROBLEMA LXIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus duorum minorum laterum multatus medio latere, & productus duorum majorum laterum multatus hypotenusâ, ac demùm productus extremorum multatus areâ, & auctus duplo minoris lateris, faciant quadratos.

CApiatur Triangulum 3. 4. 5. & singula latera dividantur per 1 N -- 1, ut fiat triangulum quæsitum $\frac{3}{1N -- 1}$. $\frac{4}{1N -- 1}$. $\frac{5}{1N -- 1}$. Ergo si productus duorum minorum multetur medio, fiet 16 -- 4 N neglecto denominatore; Rursùs si productus duorum majorum multetur hypotenusâ, fiet 25 -- 5 N. Denique si productus extremorum multetur areâ, & addatur duplo minoris, fiet primum residuum 9, secundum verò 9 + 6 N. Igitur superest ut 16 -- 4 N. 25 -- 5 N. 9 + 6 N æquentur

tur quadratis: productus igitur illorum solidus $3600 + 780N - 900Q + 120C$ erit æquandus quadrato. Finge latus $60 + \frac{13}{2}N - \frac{5769}{480}Q$, & fit pro valore $\frac{51166560}{14205361}$. Igitur divisor $1N - 1$ erit fractio $\frac{36961199}{14205361}$. Igitur si per illam fractionem dividantur sigillatim 3. 4. 5, fiet triangulum quæsitum $\frac{42616083.\ 56821444.\ 71026805}{36961199}$.

PROBLEMA LXIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus minorum auctus minore latere, & multatus medio: productus majorum multatus majore, & productus extremorum multatus area, faciant quadratos.

Ponatur, ut in præcedenti, triangulum quæsitum $\frac{3}{1N - 1}.\ \frac{4}{1N - 1}.\ \frac{5}{1N - 1}$. Ergo si omnia fiant, ut jubetur, restabunt $23 - 5N$. $16 - 4N$. $9 + 3N$ æquanda quadratis. Horum igitur productus solidus $3600 - 420N - 360Q + 60C$ æquari debet quadrato. Finge latus $60 - \frac{7}{2}N - \frac{1489}{480}Q$, &

& fit pro valore Radicis $\frac{8820960}{2217121}$. Ergo 1 N -- 1 erit $\frac{6603839}{2217121}$. Per hanc fractionem si dividas 3. 4. 5. sigillatim, extabit triangulum quæsitum $\frac{6651363.\ 8868484.\ 11085605}{6603839}$.

PROBLEMA LXV.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus unum latus circa rectum sit cubus, & in quo datus multiplex areæ additus quadrato summæ laterum circa rectum, faciat quadratum. Detur autem dupla area.

POnantur latera circa rectum 1 N & 1: sic enim latus secundum cubus erit. Duplum areæ erit 1 N, quod si addas quadrato summæ laterum circa rectum, fiet 1 Q + 3N + 1 æquandus quadrato: sed & ex ipsâ trianguli rectanguli essentiâ, 1 Q + 1 debet æquari quadrato. Ex hâc porrò duplicatâ æqualitate, per methodum vulgarem fit valor -- $\frac{24}{7}$. Quare poni debet pro novâ Radice 1 N -- $\frac{24}{7}$, & juxta hanc resolvendi erunt duo termini quadrato æquati: fiéntque

que duo novi termini quadrato æquandi $1Q - \frac{48}{7}N + \frac{625}{49}$. & $1Q - \frac{27}{7}N + \frac{121}{49}$. Reducantur unitates ad eundem quadratum, & habebuntur termini $\frac{625}{121}Q - \frac{16875}{847}N + \frac{625}{49}$ atque $1Q - \frac{48}{7}N + \frac{625}{49}$ quadratis æquandi. Horum terminorum differentia est $\frac{504}{121}Q - \frac{1581}{121}N$, quam producunt $\frac{14}{11}N$ & $\frac{36}{11}N - \frac{1581}{154}$. Istorum producentium summæ semissis quadratum, majori ex duobus prædictis æquatum dat $\frac{1284561}{323400}$. Hinc tolle $\frac{24}{7}$, ob novam Radicem, & habebis valorem pro primis positionibus $\frac{3689}{6600}$. Ergo triangulum quæsitum est $\frac{3689}{6600}$. 1. $\frac{7651}{6600}$.

PROBLEMA LXVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum sit quadratus, & area, cubus.

FOrmetur primò triangulum ab 1 N & 1. Latera sunt $1Q + 1$. $1Q\ 1$. $2N$. Area istius trianguli est $1C + 1N$, per quam si multiplices singula latera prioris trianguli, fiet novum triangulum $1S - 1N$.

1 S

1 S -- 2 C + 1 N. 2QQ -- 2Q, in quo area eſt cubus infinitè. Quare ſi accipias quemcumque numerum unitate majorem, ac per eum reſolvas prædicta latera, fiet triangulum habens cubum pro areâ: ut ſi capias 2 pro valore 1 N, fiet triangulum, 30, 18, 24, aream habens 216, cubum à latere 6. Si capias 3, fiet triangulum 240. 192. 144. Si capias 4, fiet triangulum 1020, 900, 4800: Hæc duo poſteriora ſatisfaciunt propoſitæ quæſtioni, nam illorum prius habet 144 pro uno ex lateribus circa rectum, aream verò 13824 cubum à latere 24: poſterius autem habet 900 pro uno ex lateribus circa rectum, aream verò 216000, cubum à latere 60. Facile eſt reperire infinita.

Imò triangulum 240. 192. 144. habet unum latus circa rectum, quadratum: deinde perimeter eſt etiam numerus quadratus, & area, cubus.

PROBLEMA LXVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dupla perpendicularis addita & detracta hypotenusæ quadrato, faciat quadratos: quadrupla autem area multata quolibet latere circa rectum faciat quoque quadratos.

CApe triangulum rectangulum 5. 3. 4, & ſingula ipſius latera divide per hypotenuſam, fiétque triangulum quæſitum $\frac{5.\ 3.\ 4}{5}$. Cujus rei ratio eſt, quia productus ex lateribus circa rectum æquatur producto ex hypotenuſâ in perpendicularem: ſed in noſtro caſu hypotenuſa eſt unitas, igitur perpendicularis eſt æqualis duplæ areæ. Ergo dupla perpendicularis æquatur areæ quadruplæ. At in omni triangulo rectangulo quadrupla area addita & detracta quadrato hypotenuſæ, facit quadratos: ergo idem fiet de duplâ perpendiculari. Sed Diophantus L. 6. Q. 14. demonſtrat quadruplum iſtius trianguli, tale eſſe, ut area multata quolibet

quolibet latere circa rectum relinquat quadratos; igitur quadruplum areæ multatum quolibet latere circa rectum quadratos quoque relinquet.

APPENDIX.

Imò illud idem triangulum rectangulum est ejusmodi, ut quadrupla area distet à singulis lateribus per quadratos, & quodlibet segmentum factum ex demissione perpendicularis ab angulo recto in hypotenusam æquetur quadrato lateris circa rectum sibi propinqui.

PROBLEMA LXVIII.

Invenire in integris, quotcumque Triangula rectangula, in quibus areæ sint cubi Geometricè proportionales.

FVndabitur hæc praxis in aliquot Theorematibus,quorum primum est: *Si duplicentur latera cujuscumque trianguli, fiet novum triangulum, in quo area erit quadrupla prioris areæ.* Secundum est: *Si cujuslibet trian-*

guli latera ducantur in suam aream, fiet novum triangulum, in quo area erit cubus habens pro latere aream multiplicantem. Tertium : *Cubi numerorum proportionalium sunt proportionales.* His positis, capiatur quodcumque triangulum rectangulum, putà 5. 3. 4. & hujus duplum 10. 6. 8. & istius secundi duplum 20. 12. 16. atque hujus tertii duplum 40. 24. 32. & sic deinceps in infinitum. Quodlibet ex his triangulis ducatur in suam aream; Primum quidem in 6, & fiet triangulum 30. 18. 24; Secundum in 24, & fiet 240. 144. 192. Tertium in 96, & fiet 1920. 1152. 1536; Quartum in 384. & fiet 15360. 9216. 12288. & ita de aliis. Horum novorum triangulorum areæ sunt 216. 13824. 884736. 56623104, cubi à lateribus in quadruplâ proportione : quoniam igitur cubi sunt in ratione triplicatâ laterum, erunt illi ut 1 ad 64. Ergo facta de novo posteriora triangula, sunt ea, quæ investigantur.

PRO

PROBLEMA LXIX.

Invenire quotlibet paria Triangulorum rectangulorum, in quibus areæ differant numeris Geometricè proportionalibus.

Cape duo quæcunque triangula 13. 5. 12. & 5. 3. 4. quorum areæ differunt per 24. Horum dupla triangula 26. 10. 24. & 10. 6. 8. habebunt areas differentes per 96. ac posteriorum dupla 52. 20. 48. & 20. 12. 16. habebunt areas differentes 384. Denique horum dupla 104. 40. 96. & 40. 24. 32. habent areas differentes 1536. Hæ autem quatuor differentiæ 24.96.384.1536. sunt in continuâ proportione Geometricâ, cujus denominator est 4. Igitur ejusmodi triangula sunt, quæ postulantur.

PROBLEMA LXX.

Invenire quotlibet paria Triangulorum rectangulorum, in quibus areæ differant cubis continuè proportionalibus.

INvenienda primùm erunt duo triangula, quorum areæ differant cubo: talia autem sunt 10. 6. 8. & 34. 16. 30. in quibus areæ 24, & 240, differunt per 216, cubum à latere 6. Octupla horum exhibent duo alia triangula 80. 48. 54. & 272. 128. 240. quorum areæ differunt 13824. cubo à latere 24. Hæc octuplicata dant duo alia triangula 640. 384. 512. & 2176. 1024. 1920. quorum areæ differunt 884736. cubo à latere 96. Si rursùs ista octuplicentur, habebis triangula 5120. 3072. 4096. & 17408. 8192. 15360. quorum areæ differunt 56623104. cubo à latere 384. Hæ autem differentiæ sunt continuè proportionales Geometricè, atque hujus proportionis denominator est 64, quadratus à latere 8.

PRO

PROBLEMA LXXI.

Invenire ſex paria Triangulorum rectangulorum, quorum areæ differant per cubos continuè proportionales Geometricè, & Arithmeticè ſimul.

AD hoc opus, invenienda ſunt ſex paria triangulorum, talia, vt differentia duorum quoruncumque ſit idem cubus: hæc verò ſunt ejuſmodi: Primum, 40. 32. 24. & 50. 30. 40. Secundum, 61. 11. 60. & 85. 13. 84. Tertium, 26. 24. 10. & 50. 48. 14. Quartum, 89. 39. 80. & 10. 28. 96. Quintum 10. 8. 6. & 34. 16. 30. Sextum 73. 55. 48. & 80. 48. 64. In quolibet enim pari, differentia arearum eſt 216, cubus à latere 6.

PROBLEMA LXXII.

Invenire tria paria Triangulorum rectangulorum in quibus summæ arearum sint proportionales Geometricè, & Arithmeticè.

AD hoc, inveniri debent tria paria triangulorum, in quorum quolibet summa arearum sit idem cubus. Illa autem sunt ejusmodi: Primum, 26. 24. 10. & 20. 12. 16. Secundum, 37. 35. 12. & 5. 3. 4. Tertium, 29. 21. 20. & 5. 3. 4. In quolibet enim pari, summa arearum est 216.

APPENDIX.

Hinc solves Problema sequens: *Invenire novem paria triangulorum rectangulorum, in quorum sex prioribus differentiæ arearum, & in tribus posterioribus summæ arearum sint continuè proportionales Geometricè, & Arithmeticè.* Hoc sequitur ex duobus Problematibus proximis: novem enim paria allata satisfaciunt quæstioni.

PRO

PROBLEMA LXXIII.

Invenire sex ordines Triangulorum rectangulorum in integris, in quorum singulis extent quotlibet paria triangulorum, in quibus areæ differant cubis proportionalibus Geometricè.

IN Probl. 70. exhibuimus unum ordinem ejusmodi triangulorum, utendo duobus triangulis primitivis 10. 8. 6, & 34. 16. 20. at in Probl. 71. data sunt sex paria triangulorum, quorum areæ differunt eodem cubo 216. Igitur poterimus uti aliis triangulis, latera eorum ducendo in 8, hinc enim nascentur diversa triangula ab iis quæ superiùs inventa sunt: sed eorum areæ different iisdem cubis: cùm ergo superiores differentiæ cubicæ, sint ostensæ proportionales Geometricè, erunt & aliæ. Exemplum unicum profero, utendo primo pari 40. 32. 24. & 50. 30. 40: illorum siquidem latera octuplicata dant 320. 256. 192. & 400. 240. 320. quorum areæ differunt cubo

 13824.

13824. Rursùs si ista multiplicaveris per 8, fient duo alia triangula 2560. 2048. 1536. & 3200. 1920. 2560. quorum areæ differunt cubo 884736. Idem est si octuplicentur posteriora in infinitum. Potes idem præstare cum aliis triangulis.

APPENDIX.

Ex dictis constat, posse inveniri infinita triangula, quorum areæ sint cubi: & infinita paria triangulorum, quorum areæ distent cubis, etiam in rationalibus. Sed non ita res se habet de quadratis: licèt enim infinita possint exhiberi paria triangulorum rectangulorum, quorum areæ distent quadratis, ut 50. 30. 40. & 10. 6. 8. item 20. 12. 16. & 17. 15. 8. item 61. 11. 60. & 5. 3. 4. & sic in infinitum: nullum tamen potest exhiberi triangulum rectangulum in rationalibus, cujus area sit numerus quadratus. In irrationalibus verò possint dari quotlibet: sit enim inveniendum triangulum rectangulum cujus area sit 36. Ponantur 1N & 3. pro numeris formantibus triangulum, ergo latera erunt 1Q + 9. 1Q − 9. 6N. Hujus trianguli area est 3C − 27N.

quæ

quæ si æquetur numero quadrato 36, dabit quod quæritur. Hæc verò æquatio sic resolvitur. Divisis omnibus per 3, fiet 1C -- 9N æqualis 12. Triens numeri Radicum est 3, cujus cubus 27 sublatus ex quadrato dimidii homogenei 36. (homogeneum est numerus absolutus 12, cujus dimidium est 6) relinquit 9. hujus Radix quadrata 3, addita & detracta dimidio supradicto 6, facit 9 & 3, quorum radices cubicæ simul additæ dant valorem Radicis ℞ cubica 9 + ℞ cubicâ 3. Igitur numeri formantes, qui fuêre 1N & 3, erunt ℞ cubica 9 + ℞ cubicâ 3, & 3. Ex his formabitur triangulũ rectangulum more solito, in quo hypotenusa est ℞ cubica 81 + ℞ cubicâ 9 + 15, & unum latus circa rectum ℞ cubica 81 + ℞ cubicâ 9 -- 3, alterum autem ℞ cubica 1944 + ℞ cubica 648. Aio verò in eo triangulo rectangulo aream esse 36: etenim si unum latus ducatur in dimidium alterius, fiet productus ℞ cubica 19683 (seu 27) + ℞ cubicâ 729 (seu 9) + ℞ cubicâ 6561 -- ℞ cubicâ 6561 + ℞ cubicâ 2187 -- ℞ cubicâ 2187, qui est 36.

Aliter, quæri potest vagè triangulum rectangulum in quo area sit numerus quadratus,

dratus, quicumque tandem ille sit, sive rationalis, sive irrationalis. Sint numeri formantes 1 N & 1. Latera sunt 1 Q + 1. 1 Q -- 1. 2 N. Area autem est 1 C -- 1 N. Hæc æquetur 4 Q, & fit valor ℞ 5 + 2. Igitur numeri formantes erunt ℞ 5 + 2 & 1, unde formatur triangulum rectangulum 10 + ℞ 80. 8 + ℞ 80. ℞ 20 + 4. In hoc autem triangulo area est 36 + ℞ 1280, quadratus à latere ℞ 20 + 4.

PROBLEMA LXXIV.

Invenire Triangulum rectangulum cujus area sit æqualis areæ dati cujuscumque trianguli.

PRima methodus. Dato triangulo 5 . 3 . 4. cujus area est 6, inveniendum sit triangulum aliud cujus area sit 6. Inquiratur primò triangulum aliquod rectangulum, cujus area sit sextans alicujus quadrati. Et ponantur latera circa rectum hujus trianguli 1 N + 4 & 3 (4 & 3 sunt latera circa rectum trianguli dati) horum quadrata simul addita faciunt 1 Q + 8N + 25 æqualem

lem quadrato hypotenusæ. Latera autem in se ducta conficiunt duplam aream 3 N + 12, cujus triplum 9 N + 36 erit sextupla area. Ergo cùm sextans areæ debeat esse quadratus, sextupla area quadrato æquanda erit. Ergo duo illi termini 1 Q + 8 N + 25 & 9 N + 36 æquandi quadrato, in se ducti facient productum 900 + 513 N + 108 Q + 9 C æquandum quadrato. Finge latus 30 + $\frac{171}{20}$N + $\frac{4653}{8000}$Q. istius enim lateris quadratum producto superiori æquatum, dabit pro valore, $-\frac{60530400}{21650409}$. Per hunc valorem si resolvas latera circa rectum posita 1 N + 4 & 3. habebitur pro primo latere, $\frac{2896804}{2405601}$, & 3 pro secundo. Igitur horum quadrata simul addita, dabunt quadratum hypotenusæ, cujus radix erit hypotenusa. Itaque jam habetur triangulum, cujus area est sextans alicujus quadrati, ergo sextupla quoque erit quadrati, cujus radix quadrata $\frac{851}{1551}$ dividens singula latera trianguli inventi, dabit triangulum quæsitum, cujus area erit 6, nempè $\frac{7776485.\ 7216803.\ 2896804}{1319901}$.

Secunda methodus facilior est, proceditque non per laterum circa rectum positionem, sed per numeros formantes: quoniam enim trianguli 5. 3. 4. numeri formantes,

mantes sunt, 2 & 1, pones pro numeris formantibus 1 N + 2 & 1. Hinc formantur latera 1 Q + 4 N + 5. 1 Q + 4 N + 3. 2 N + 4. Hujus area est 1 C + 6 Q + 11 N + 6 quæ debet esse sextupla alicujus quadrati, ergo ducta in 6, faciet 6 C + 36 Q + 66 N + 36, qui æquari debet quadrato. Finge latus 6 + $\frac{11}{2}$N + $\frac{23}{48}$Q, & habebis pro valore, $\frac{1680}{529}$. Igitur numeri formantes 1 N + 2 & 1, erunt in integris 2738 & 529. Hinc formabis triangulum 7776485. 7216803. 2896804. atque hujus trianguli area sextupla erit 1742138649801 quadrati à latere 1319901. Igitur latus istud dividens tria latera mox reperta, dabit triangulum quæsitum, cujus area est 6. éstque idem cum superiore.

Tertia methodus est facillima, & explicatur hoc præcepto: Dati trianguli cape hypotenusam, & ex illius quadrato, ac quadruplo areæ forma triangulum. Deinde quoniam quadratum hypotenusæ auctum & multatum quadruplâ areâ, facit quadratos: illorum quadratorum radices multiplica inter se, & productus radicum ducatur in duplum hypotenusæ: hic productus posterior erit denominator trianguli mox formati:

formati : fitque hoc pacto novum triangulum, habens eandem aream cum triangulo dato. Vt si detur triangulum 5. 3. 4. Ex quadrato hypotenusæ 25, & quadruplo areæ 24, formabis triangulum 1201. 1200. 49. Tum hypotenusæ quadratum auctum & multatum quadruplâ areâ facit quadratos 49 & 1, quorum radices 7 & 1 ductæ in se faciunt 7: productum illum duces in 10 (duplum est hypotenusæ 5) & fient 70 pro denominatore prædicti trianguli, & triangulum quæsitum est $\frac{1201.\ 1200.\ 49.}{70}$.

PROBLEMA LXXV.

Invenire infinita Triangula rectangula ejusdem areæ cum triangulo dato.

SIt datum triangulum 5. 3. 4. cujus area est 6. Iam dedimus duo triangula eandem cum illo habentia aream, nempè $\frac{7776485.\ 7216803.\ 2896804}{1319901}$. & prætereà $\frac{1201.\ 1200\ 40}{70}$. Vtere postremo illo triangulo, ac per tertiam methodum invenies aliud triangulum $\frac{2094350404801.\ 2066690884801.\ 339252715200}{241717895600}$. Tum utere triangulo secundo, cujus denominator est 1319901,

1319901, ac per eandem methodum tertiam, invenies alterum triangulum rectangulum, cujus tres Numeratores erunt 540525777995506794243424108 01. 190888356900039950676719044 9. 505697294827683944995969080 0. At verò denominator communis erit 896900801363839325090016210.
Rursùs utere triangulo cujus denominator est 70, adhibendo secundam methodum hoc pacto. Numeri formantes triangulum 1201. 1200. 49. sunt 25 & 24. Pone pro numeris formantibus 1 N + 25 & 24. Latera erunt 1 Q + 50 N + 1201. 1 Q + 50 N + 49. 48 N + 1200: erit igitur area trianguli hujus 48 C + 1800 Q + 31176 N + 29400. & quia sextans hujus areæ debet esse quadratus, necesse est ut areæ sextuplum 288 C + 10800 Q + 187056 N + 176400. quadrato æquetur. Finge latus $420 + \frac{7794}{35}N - \frac{3959703}{85750}Q$, fietque pro valore $\frac{5076075813 0600}{5226415949403}$. Ergo numeri formantes 1 N + 25 & 24 erunt in integris 6047371895 5225, & 41811327595224. unde formatur triangulum specie 540525777995506794243424108 01. 190888356900039950676719044 9.

50569-

5056972948276839449959690800. Hujus trianguli rectanguli area est 4826586284922582992096693557115-5615150741165083765584600: hujus autem areæ sextans est quadratus à latere 89690080136383932509001621 0. Hoc latus dividens tria latera mox exhibita dat triangulum quæsitum, in quo area est 6. Cujus examen factum est exactissimum.

Triangula duodecim habentia eandem aream 840.

Diophantus L. 5. Q. 8. nullo negotio invenit tria sequentia: Primum 58. 40. 42. Secundum 74. 24. 70. Tertium 113. 15. 112.

Inde per methodum tertiam, utendo quolibet illorum, reperies tria alia, nam si utaris primo, invenies quartũ $\frac{1412881.\ 1681.\ 1412880}{1189}$. Si utaris secundo; habebis quintum $\frac{2579761.\ 1168561.\ 2299920}{39997}$. Si utaris tertio, invenies sextum $\frac{17436961.\ 151757761.\ 85807680}{2784094}$.

Rursùs per eandem tertiam methodum, uteris quarto triangulo, & fiet septimum triangulum, cujus latera sunt 39849676165157158544195 21.

398492250956705481731 2321. 1896462030878505942 4320. cum denominatore communi 6706985624184527244502. Vteris quinto triangulo, & fiet octavum, cujus numeratores erũt 731839519262811317011 86241. 153985388011357920162710 41. 71545620567146828350678080. & denominator communis 8097978930523304852036 86. Vteris posteà sexto triangulo, & extabit nonum, cujus numeratores 1602045-300537957578502752246583041. 24-5469305256577718367993174019841. 1583127905493617360283743067736-320. & denominator communis 15209045458092397697116664797628.

Hinc per methodum secundam, compones tria alia triangula ejusdem areæ, quorum unum fiet beneficio primi trianguli: sed ut vitentur in operatione longiores numeri, accipiam semissem laterum 29. 21. 20. hujus trianguli area est 210. & numeri formantes 5. & 2. Quare ponam 1N + 5 & 2, pro numeris formantibus triangulum. Latera erunt 1Q + 10N + 29. 1Q + 10N + 21. 4N + 20. hujus area est

eſt $2C + 30Q + 142N + 210$, cujus pars 210. debet eſſe quadratum. Ergo area ducta in 210, faciet quoque quadratum: facit autem $420C + 6300Q + 29820N + 44100$: igitur ille numerus æquandus eſt quadrato. Finge latus $210 + 71N + \frac{1259}{420}Q$, & fit pro valore $-\frac{998762}{1585081}$. Ergo numeri formantes $1N + 5$ & 2, erunt in integris 6926645 & 3170162: ex quibus formatur triangulum ſequens 58028338062269. 37928483849781. 43917173532980. Illius autem trianguli area eſt 83285590353683075568 46-84638690, cujus pars 210. eſt 396598049303252740802 2089 quadratum à latere 1991476962717. Igitur latus illud dividens ſingula latera trianguli mox formati, dat triangulum, cujus area eſt 210: quare ſi illius trianguli ſingula latera ducantur in 2, fit triangulum quæſitum, in quo area erit 840, eſtque ordine decimum, nempè

$$\frac{116056676124538.\ 75856967699562.\ 87834347065960}{1991476962717}.$$

Sic capiendo ſemiſſes ſecundi trianguli, habebis 37. 35. 12. cujus area eſt 210, & numeri formantes 6 & 1. Pono igitur pro numeris formantibus aliud triangu-

 lum

lum 1N + 6 & 1. Latera sunt 1Q + 12N + 37. 1Q + 12N + 35. 2N + 12. hujus area est 1C + 18Q + 107N + 210. Debet ergo istius areæ pars 210. æquari quadrato : ac proinde si hæc area ducatur in 210, productus 210C + 3780Q + 22470N + 44100 debet quadrato æquari. Finge latus $210 + \frac{107}{2}N + \frac{3671}{1680}Q$, & fit pro valore $-\frac{67194960}{13476241}$. Igitur numeri formantes 1N + 6 & 1, erunt in integris 13662486 & 13476241, unde formatur triangulum 368272595190277. 5054452210115. 368237907990252. Hujus area est 9306204539447266196378994900. & areæ pars 210. est 44315259711653648554185690, quadratum à latere 2105118992163. Ergo si illud latus dividat trianguli mox formati singula latera, fiet triangulum rectangulum, cujus area erit 210 : si verò singula illius latera ducantur in 2, fit undecimum triangulum, cujus area est 840, nimirùm $\frac{736545190380554.\ 10108904420230.\ 736475815980504}{2105118992163}$.

Denique capies tertium triangulum 113. 15. 112. quod formatur à 8 & 7. & ideò pones 1N + 8 & 7, pro numeris formantibus. Latera sint 1Q + 16N + 113. 1Q + 16N + 15. 14N + 112. Hujus trianguli

trianguli area eſt 7C + 168Q + 1001N + 840. quæ (ob rationem ſuprà explicatam) ducta in 840, facit productum 5880C + 141120Q + 840840N + 705600 æquandum quadrato. Finge latus $840 + \frac{1001}{2}N - \frac{62503}{950}Q$, & fit pro valore $\frac{1336365120}{79727041}$. Igitur 1N + 8 & 7 erunt in integris 1974181448 & 558089287. unde formabitur triangulum 4208856041891545073. 3585928737363208335. 2203539033445895152. Hujus trianguli area erit 395086697196759165184558-7957371245960, cujus pars 840. eſt 4703413061866180537911414234965769 quadratum à latere 68581433798559363. Hoc latus dividens tria latera mox formata dat duodecimum triangulum, in quo area eſt 840. Quæ omnia exactiſſimè ſunt probata.

PROBLEMA LXXVI.

Invenire in integris decem Triangula rectangula, in quorum quolibet area sit centupla perimetri.

SVnt tantùm duo triangula rectangula in integris, quorum areæ ſint æquales perimetris, nempè 10. 8. 6. in quo tùm area, tùm perimeter eſt 24. & 13. 5. 12. ubi tàm area quàm perimeter eſt 30. Deinde ſunt tantùm tria triangula rectangula in integris in quorum quolibet area ſit dupla perimetri, nempè 26. 24. 10. & 20. 12. 16. & 41. 9. 40. Præterea ſunt tantùm quatuor triangula rectangula in integris, in quorum quolibet area ſit tripla, vel quadrupla, vel quintupla perimetri. Sunt ſex pro ſextupla: quæ omnia & innumera pro ſequentibus, continentur hoc præcepto.

Dum agitur de proportione, quæ duplâ major eſt. Adverte numeros producentes denominatorem proportionis exactè: &

ſi

si sint duo tantùm, erunt quatuor triangula: si sint quatuor tantùm, erunt sex triangula: si sunt sex, erunt octo triangula, & ita deinceps numerus triangulorum superabit binario, numerum producentium.

Sic autem reperiuntur ipsa triangula numero. Duorum quorumcunque producentium, duplum unius addatur cum altero: summa hæc & minor producens erunt duo numeri formantes primum triangulum: eadem summa cum duplo prædicto dabit numeros formantes secundum triangulum, & sic de cæteris. Res erit clara in nostro exemplo quod exigit triangula decem rectangula, in quorum quolibet area sit centupla perimetri. 100 est denominator proportionis: éstque productus 100 in 1. & 50 in 2. & 25. in 4. & 10. in 10. Duplum primi producentis est 200 quod additum 1, facit 201 & 1 pro duobus numeris formantibus primum triangulum 40402. 40400. 402. Deinde ex duobus illis formantibus, primus & eorum differentia dabit duos alios numeros 201 & 200 formantes secundum triangulum 80401. 401. 80400. Tum duplum secundi produ-

centis cum primo facit 102 & 2, qui formant tertium triangulum 10408. 10400. 408. Præterea ex duobus illis producentibus primus cum eorum differentiâ dat duos 102 & 100 formantes quartum triangulum 20404. 404. 20400. Idem fiet cum duobus aliis producentibus 50 & 2, fient enim 4 triangula ex illis, sed quorum duo concurrunt cum 4 prioribus: scribo tantùm duo non concurrentia, quorum primum 2932. 2900. 432 formatur ex 54 & 4. secundum verò 5416. 416. 5400. formatur ex 54 & 50. Deinde si idem fiat cum producentibus 25 & 4, extabunt rursùs quatuor triangula, sed eorum duo concurrunt cum præcedentibus: unde scribo duntaxat septimum 1153. 1025. 528. quod formatur ex 33 & 8, & octavum 1714. 464. 1650. quod formatur ex 33 & 25. Denique si idem fiat cum 10 & 10, habebis duos numeros 30 & 10 formantes nonum triangulum 1000. 800. 600. & alios duos 30 & 20 formantes decimum triangulum 1300. 500. 1200. Habes igitur decem triangula rectangula in quorum quolibet area est centupla perimetri.

PRO

PROBLEMA LXXVII.

Invenire in integris infinita Triangula rectangula, in quorum quolibet area ad perimetrum eandem habeat rationem.

POstulentur primùm triangula rectangula 12. Capio aliquem denominatorem proportionis, qui habeat 10 producentes, seu 5 paria producentium: talis est 48. qui producitur ex 48 & 1. ex 24. & 2. ex 12 & 4. ex 6 & 8. & ex 3. atque 16. Inde per artificium Problematis præcedentis formabuntur 12 sequentia triangula rectangula. Primum 9410. 9408. 194. Secundum 18625. 193. 18624. Tertium 2504. 2496. 200. Quartum 4804. 196. 4800. Quintum 800 768. 224. Sextum 1360. 208. 1344. Septimum 464. 336. 320. Octavum 544. 256. 480. Nonum 740. 228. 704. Decimum 520. 448. 264. Vndecimum 2249. 201. 2240. Duodecimum 1234. 1216. 210.

Si volueris 14 triangula, cape duplum 48,

nempè 96, ut habeat ſex paria producentium : ſi exigas 16 triangula, accipiendum erit duplum 96, nempè 192, ut habeat ſeptem paria producentium, & ſic deinceps in infinitum.

PROBLEMA LXXVIII.

Invenire infinita Triangula rectangula iſoperimetra.

PRima methodus. Ponantur numeri formantes 1 N & 1. Latera erunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. pro primo triangulo. Sint latera ſecundi 1 Q. 1 Q − 1 N. 3 N: ſic enim ſunt iſoperimetra (potuerunt poni 1 Q. 1 Q − 2. 4 N. rursùs 1 Q. 1 Q − 3 N. 5 N & ſic deinceps.) Supereſt ut ſecundum ſit triangulum rectangulum : ergo ejus hypotenuſæ quadratum 1 QQ. æquabitur quadratis laterum 1 QQ − 2 C + 10 Q, & ſit valor 5, & triangula quæſita 26. 24. 10. & 25. 20. 15.

Secunda methodus. Cape duo obvia quæque triangula 5. 3. 4. & 13. 5. 12. Summa primi ad ſummam ſecundi eſt ut 2. ad

ad 5 : igitur ſi primum ducas in 5 & ſecundum in 2, fient duo triangula iſoperimetra 25. 20. 15. & 26. 10. 24. Cape deinde 8. 15. 17. Summa cujuſlibet ex duobus præcedentibus ad ſummam iſtius eſt ut 3 ad 2. ergo ſi ducas præcedentia in 2, & iſtud in 3, fient tria triangula rectangula iſoperimetra 51. 45. 24. & 50. 40. 30. & 52. 20. 48. Rursùs potes capere aliud 25. 7. 24 & ſic in infinitum.

APPENDIX.

Lubet hîc excurrere in celebrem praxim de triangulis iſoſcelibus, iſoperimetris, & æqualibus : hæc enim pendet ab triangulis rectangulis, & circa illam quæſtiones aliquot diverſi generis proponere.

QVÆST.

QVÆSTIO I.

Invenire duo Triangula isoscelia, isoperimetra, & æqualia.

INveniantur duo numeri quorum productus additus summæ quadratorum ab illis ortorum, sit quadratus. Sint duo illi 1N & 1. Ergo 1Q + 1N + 1 æquandus est quadrato. Finge latus 1N − 2, & fit valor $\frac{3}{5}$. & ità numeri quæsiti in integris erunt 3 & 5. productus enim illorum 15 additus quadratis 9 & 25, facit 49, quadratum à latere 7. Hoc latus nectatur cum alterutro numerorum inventorum, ac tùm ex 7 & 5 formentur duo triangula rectangula 58. 40. 42. & 74 24. 70. Hæc erunt æqualia quoad aream, & capiendo alterutrius hypotenusam pro lateribus æqualibus & duplum lateris medii (seu duplum differentiæ quadratorum à numeris formantibus ortorum) extabunt duo triangula isoscelia, isoperimetra, & æqualia. 58. 80. 58. & 74. 48. 74.

QVÆST.

QVÆSTIO II.

Invenire quotquot quis voluerit Triangula iſoſcelia, iſoperimetra, & æqualia.

INvento 1Q + 1N + 1 qui debuit quadrato æquari, finxi latus ad libitum 1N -- 2. Potuit fingi infinitis aliis modis. Ergo infinita alia triangula inde orta fuiſſent. Exhibeo hîc aliquot paria triangulorum, quæ & iſoſcelia ſunt, & iſoperimetra, & æqualia. Primum 37. 24. 37. & 29. 40. 29. Secundum 218. 240. 218. & 233. 210. 233. Tertium 4201. 8160. 4201. & 7753. 1056. 7753. Quartum 333. 216. 333. & 261. 360. 261. Quintum 1537. 770. 1537. & 1082. 1680. 1082. Sextum 2097. 1890. 2097. & 1962. 2160. 1962. Omitto alia, quæ facilè quilibet per ſeipſum invenire poterit.

QVÆST.

QVÆSTIO III.

Invenire infinities duo triangula isoscelia, isoperimetra, & æqualia, in quorum quolibet perimeter sit æqualis suæ areæ.

CApiantur primò duo triangula isoscelia, isoperimetra, & æqualia, verbi gratiâ 37. 24. 37. & 29. 40. 29. Perpendicularis primi est 35. Perpendicularis secundi 21: ponatúrque primum triangulum quæsitum 37N. 24N. 37N: igitur ejus perpendicularis erit 35N, & area 420Q, & summa laterum 98N: hæc summa æquetur areæ, & fit valor $\frac{7}{30}$. Cùm igitur in utroque triangulo sit eadem perimeter, & area eadem, fiet idem valor in secundo triangulo: ergo si utrumque triangulum ducas in istum valorem, habebuntur duo triangula quæsita. $\frac{259.\ 168.\ 259}{30.}$ & $\frac{203.\ 280.\ 203}{30}$. Cùm itaque dederimus methodum, ad invenienda quotlibet paria triangulorum isoscelium, isoperimetrorum, & æqualium, facilè repe

reperientur infinita paria ejuſdem rationis cum priore.

QVÆSTIO IV.

Invenire infinita Triangulorum iſoſcelium & iſoperimetrorum paria, in quorum quolibet, area unius ad ſuam perimetrum habeat datam rationem.

Esto data ratio centupla, & poſitis iiſdem, quæ ſunt poſita in præcedente, inventíſque 98N & 420Q, ducatur 98N in 100, & fient 9800N æquales 420Q. oritúrque inde valor $\frac{70}{3}$, & duo triangula quæſita $\frac{2590.\ 1680.\ 2590}{3}$ & $\frac{2030.\ 2800.\ 2030}{3}$. At dedimus artem inveniendi innumera iſtiuſmodi triangula: igitur facile eſt reperire infinita paria ejuſdem rationis.

QVÆSTIO V.

Invenire infinita Triangulorum isoscelium, isoperimetrorum, & æqualium paria, in quorum quolibet dupla area seu planum ex basi in perpendicularem sit cubus.

CApe quodlibet par triangulorum isoperimetrorum æqualium, ut 333. 216. 333 & 261. 360. 261. Horum areæ 34020 quadrans 8505 ducatur in singula latera prædicta, & fient duo alia triangula isoscelia isoperimetra æqualia 2832165. 1837080.2832165.& 2219805.3061800. 2219805. in quorum quolibet dupla area 4921675101000 cubus erit à latere 17010 dimidiæ areæ priorum. Idem erit de quocumque alio pari.

QVÆSTIO VI.

Invenire quotlibet paria Triangulorum isoſcelium isoperimetrorum & æqualium, in quibus area ſit cubus.

CApe quodlibet par iſtiuſmodi iſoſcelium, ut 37. 24. 37. & 29. 40. 29. & eorum area 420 ducatur in ſingula latera, fiétque aliud par triangulorum, 15540. 10080. 15540. & 12180. 16800. 12180. in quibus area 74088000 cubus erit à latere prioris areæ 420. Cùm itaque captum ſit triangulorum par iſtud ad libitum, idem de quocunque alio fieri poterit, atque ità quotlibet exhibebuntur.

QVÆSTIO VII.

Invenire quotlibet paria Triangulorum isoscelium, isoperimetrorum, & æqualium, itaut summa laterum cujuslibet trianguli sit quadratus, & area cujuslibet, cubus.

CApe duo triangula hujusmodi quælibet, puta 37. 24. 37. & 29. 40. 29. & quoniam summa cujuslibet quadratus non est, duces hanc summam 98 in singula latera; vel saltem quia summa hæc in 2 ducta facit quadratum, duces compendiosè singula latera in 2, & fient duo nova triangula 74. 48. 74. & 58. 80. 58. in quorum quolibet summa erit 196, quadratus à latere 14. Latus quodlibet afficiatur charactere quadratorum 74Q. 48Q. 74Q, & 58Q. 80Q. 58Q. Hujus area est 1680QQ. Hæc æquetur cubo 1C, & fit valor $\frac{1}{1680}$. Ergo si per hujus valoris quadratum multiplices singula latera triangulorum 74. 48. 74. & 58. 80. 58.

58. fient triangula quæſita $\frac{74.\ 48.\ 74.}{2822400}$ & $\frac{58.\ 80.\ 58}{2822400}$. Cùm igitur captum ſit pro libito par iſtud, idem de quocumque alio fieri poteſt.

QVÆSTIO VIII.

Invenire duo triangula iſoſcelia, iſoperimetra, æqualia, & diſsimilia, quorum omnia cùm latera, tùm perpendicula ſint inter ſe, ut numerus ad numerum, & quorum uniuſcujúſque ratio ad triangulum iſoperimetrum æquilaterum ſit major quâcunque ratione datâ minoris inæqualitatis.

HÆc quæſtio venit in manus meas per unum è noſtris Patribus, cui Dom. de Robert-val tradiderat ſine ſolutione: hanc autem ſic adinveni. Ponantur numeri formantes duo iſoſcelia 1N + 1 & 1N, ut differant unitate. Ex his ſic formabuntur triangula. Quadrata illorum numerorum formantium ſuo juncta producto faciunt 3Q + 3N + 1 æquanda quadrato. Finge

latus 1 -- 2N, & fit valor 7. Igitur numeri formantes 1N + 1 & 1N erunt 8 & 7, quorum quadrata juncta producto, faciunt 169, quadratum à latere 13. Formentur duo triangula isoscelia à 13 & 8, itémque à 13 & 7, fiéntque 233. 210. 233 & 218. 240. 218. Perpendicularis primi est 208. & perpendicularis secundi 182. Area utrobique 21840, perimeter autem 676. Ergo latus trianguli æquilateri erit triens numeri 676, & quadratum perpendicularis in illo triangulo æquilatero erit nona pars numeri 342732. Igitur triens 586 erit major ipsâ perpendiculari, ac proinde si triens 586 ducatur in semissem lateris trianguli æquilateri , fiet productus major areâ trianguli æquilateri : fit autem nona pars 198068, hæc itaque pars nona major erit triangulo æquilatero. Sed area triangulorum isoscelium inventorum ad hanc aream se habet ut 19656o ad 198068. ista autem est longè major quàm 99 ad 100, quia productus extremorum 19656000 major est producto mediorum. Ergo si detur ratio minor 99 ad 100, duo triangula inventa sunt illa quæ inquiruntur.

Sed detur ratio 999 ad 1000, & ponantur

tur numeri formantes 1 N + 8, & 1 N + 7. (hi rursùs differunt solâ unitate, & 8 ac 7 sunt numeri formantes priorum triangulorum isoscelium.) Horum igitur quadrata suo addita producto, faciunt 3Q + 45N + 169 æquanda quadrato. Finge latus 13 -- 2N. & fit valor 97. Quare numeri formantes 1N + 8 & 1N + 7, erunt 105 & 104, quorum quadrata juncta producto, faciunt 32761 quadratum à latere 181. Ergo si formentur duo triangula isoscelia ex 181 & 105, itémque ex 181 & 104, erunt 43786. 43472. 43786. & 43577. 43890. 43577 isoperimetra, & æqualia, & area utriuslibet est 826185360. & perimeter 131044. Perpendicularis primi est 38010. Perpendicularis secundi 37648. Igitur latus trianguli æquilateri isoperimetri erit triens numeri 131044, & dimidium latus triens 65522, & perpendicularis major verâ erit triens 113488. Quare si triens iste ducatur in dimidium latus, fiet productus major areâ trianguli æquilateri, seu nona pars numeri 7435960736. Sed area prædicta isoscelium 826185360 ad hanc nonam partem est ut 7435668140 ad 7435960736, &

majorem habet rationem quam 999 ad 1000, quia productus extremorum major est producto mediorum : imò etiam major quàm 9999 ad 10000. Ergo inventa sunt duo isoscelia quæsita.

Detur nunc ratio 99999 ad 100000, & ponantur numeri formantes 1N + 105 1N + 104 (adverte illos differre unitate, & numeros absolutos fuisse formantes in duobus triangulis inventis.) Horum quadrata suo addita producto, faciunt 3Q + 627N + 32761 æquanda quadrato. Finge latus 181 -- 2N, & fit valor 1351. Ergo numeri formantes 1N + 105, & 1N + 104, erunt 1456 & 1455. Horum quadrata suo juncta producto faciunt 6355451, quadratum à latere 2521. Quare si formentur duo isoscelia ex 2521 & 1456, itémque ex 2521 & 1455, erunt 8475377. 8471010. 8475377. & 8472466. 8476832. 8472466. Perpendicularis primi est 7341152. Secundi 7336110. Alterius area est 31093486001760. & perimeter 25421764. Hinc sequitur latus trianguli æquilateri isoperimetri fore trientem 25421764, & perpendicularis major justo triens 22015894. Horum itaque productus

ductus ſeu nona pars numeri 27941430758508 erit major areâ trianguli æquilateri : & eſt major ratio areæ iſoſcelium 31093486001760 ad iſtum productum , quàm 99999 ad 100000. quia productus extremorum eſt major producto mediorum : imò major eſt proportio quàm 999999 ad 1000000, & major quoque quàm 9999999 ad 10000000.

Poſſet rursùs redintegrari operatio , ponendo pro numeris formantibus nova iſoſcelia 1N + 1456 & 1N + 1455 , & invenirentur adhuc triangula iſoſcelia , quæ majorem haberent rationem quam 99999999 ad 100000000 , & ſic deinceps in infinitum. Quæſtioni adjici poteſt nova conditio , nempè ut ſumma laterum ſit numerus quadratus.

QVÆSTIO IX.

Invenire infinita Triangula isoscelia in integris, quorum areæ sint in continuâ proportione Geometricâ, cujus denominator non sit quadratus.

ADdo postremam istam conditionem, quia si illa admittatur, nihil est facilius; etenim quodlibet triangulum isosceles duplicatum, dat novum triangulum cujus area est quadrupla areæ prioris; triplicatum, dat novum triangulum, cujus area est nuncupla prioris; quadruplicatum, dat triangulum, cujus area est prioris sedecupla; & sic deinceps. Cujus quidem ratio est, quia triangula similia sint in ratione duplicatâ laterum: Hinc porrò sequitur, si obvium quodcumque triangulum duplicetur, vel triplicetur, aut quadruplicetur, aut per quemcumque numerum multiplicetur continuè, semper fore triangula producta in continuâ proportione numeri quadrati ad numerum quadratum.

Quæ

Quærantur itaque primò infinita triangula isoscelia, quorum areæ sint continuè proportionales in ratione duplâ. Capies duo triangula rectangula 13. 5. 12. & 17. 15. 8. quorum areæ 30 & 60. Ex his compones duo isoscelia 13. 24. 13. & 17. 16. 17. quorum areæ sint 60. & 120. Si duplum primi trianguli ponatur tertio loco, & duplum secundi quarto loco, & duplum tertii quinto loco, & duplum quarti sexto loco, & sic deinceps, habebuntur quotlibet triangula isoscelia in dupla proportione: Primum 13. 24. 13. Secundum 17. 16. 17. Tertium 26. 48. 26. Quartum 34. 32. 34. Quintum 52. 96. 52. Sextum 68. 64. 68. Septimum 104. 192. 104. &c.

Secundò, si quærantur triangula isoscelia in proportione triplâ, capies duo triangula rectangula, quorum areæ sint ut 1 ad 3: talia sunt 61. 11. 60. & 101. 99. 20. Ex his compones isoscelia 61. 120. 61. & 101. 40. 101. quorum areæ sunt ut 1 ad 3. Igitur si triplum primi constituatur tertio loco, triplum secundi quarto, triplum tertii quinto, & sic deinceps: Primum erit 61. 120. 61. Secundum 101

40. 101. Tertium 183. 360. 183. Quartum 303. 120. 303. Quintum 549. 1080. 549. Et sic deinceps.

Tertiò, si quærantur triangula isoscelia in proportione quintuplâ, capies primùm triangula rectangula, quorum areæ sint ut 1 ad 5: ejusmodi sunt 5. 3. 4. & 13. 5. 12. Ex his compones isoscelia 5. 8. 5. & 13. 24. 13. quorum areæ erunt ut 1 ad 5. Igitur si quintuplum primi collocetur tertio loco, quintuplum secundi quarto, quintuplum tertii quinto, & ita deinceps, triangulorum quæsitorum primum erit 5. 8. 5. Secundum 13. 24. 13. Tertium 25. 40. 25. Quartum 65. 120. 65. Quintum 125. 200. 125. &c.

Quartò, si quærantur isoscelia in proportione sextuplâ, capies duo triangula rectangula, quorum areæ sint ut 1 ad 6, ut 13. 5. 12. & 41. 9. 40. Ex his compones triangula isoscelia 13. 24. 13. & 41. 80. 41. Ea sextuplicabis, ut dictum est, & fient triangula quæsita: Primum 13. 24. 13. Secundum 41. 80. 41. Tertium 78. 144. 78. Quartum 246. 480. 246. Quintum 468. 464. 468. Et ita de aliis.

Quintò

Quintò, si quærantur isoscelia in proportione septuplâ, capies triangula rectangula 13, 5, 12. & 29. 21. 20. quorum areæ sunt ut 1 ad 7. Ex his compones isoscelia 13. 24. 13. & 29. 40. 29. Ea septuplicabis ordine suprà explicato, & triangulorum quæsitorum fiet primum 13. 24. 13. Secundum 29. 40. 29. Tertium 91. 168. 91. Quartum 223. 280. 223. Quintum 637. 1176. 637. Et sic de cæteris.

Sextò, si quærantur triangula in proportione octuplâ, capientur duo triangula rectangula 13. 5. 12. & 34. 16. 30. quorum areæ se habent ut 1 ad 8. Ex his componentur duo isoscelia 13. 24. 13. & 34. 60. 34. & ea octuplicabuntur ordinatè, ut explicatum jam est non semel, ac triangulorum quæsitorum extabit primum 13. 24. 13. Secundum 34. 60. 34. Tertium 104. 196. 104. Quartum 272. 480. 272. Quintum 832. 1568. 832. Et infinita alia istiusmodi.

Septimò, si quærantur triangula in proportione decuplâ, capies duo triangula rectangula 5. 4. 3. & 17. 8. 30. Ex his compones isoscelia 5. 8. 5. & 17. 16. 17. quorum areæ se habent ut 1 ad 10. Quare si

ea

ea cum ordine decuplentur, triangulorum quæsitorum fiet primum 5. 8. 5. Secundum 17. 16. 17. Tertium 50. 80. 50. Quartum 170. 160. 170. Quintum 500. 800. 500. Et ita de aliis.

Octavò, si quærantur triangula in proportione undecupla, eligentur statim triangula rectangula 13. 5. 12. & 61. 11. 60. & ex iis componentur isoscelia 13. 24. 13. & 61. 120. 61. quorum areæ sunt ut 1 ad 11. Atque illa undecuplata, vt dictum est, dabunt triangulorum quæsitorum primum 13. 24. 13. Secundum 61. 120. 61. Tertium 143. 264. 143. Quartum 221. 1320. 221. Quintum 1573. 1804. 1573. Et sic deinceps.

Nonò, si quærantur triangula in proportione duodecuplâ, capies triangula rectangula 17. 15. 8. & 82. 80. 18. atque ex iis ordine jam sæpiùs repetito, triangulorum quæsitorum erit primum 17. 16. 17. Secundum 82. 36. 82. Tertium 204 192. 204. Quartum 984. 432. 984. Quintum 2448. 2304. 2448. Omitto reliqua.

Imò ex dictis manifestum est in qualibet ex prædictis proportionibus posse duos ordines triangulorum in infinitum exhiberi.

beri. Vt ſi poſtulentur triangula iſoſcelia infinita quorum areæ ſint continuè proportionales in ratione duplâ, præter eum ordinem, qui jam exhibitus eſt, ex iiſdem triangulis rectangulis 13. 5. 12. & 17. 15. 8. triangulorum quæſitorum (duplando medios ex prædictis) poteſt dari primum 13. 10. 13. Secundum 17. 30. 17. Tertium 26. 20. 26. Quartum 34. 60. 34. Quintum 52. 40. 52. &c.

Iſtud non debet omitti, quod omninò ſingulare eſt, dari videlicèt duo triangula iſoſcelia quorum primum duplum eſt ſecundi, tùm quoad aream, tùm etiam quoad perimetrum : nempè 26. 48. 26. & 17. 16. 17. Primi enim perpendicularis eſt 10, & ſecundi 15. Igitur primi area erit 240, ſecundi autem 120. Deinde perimeter primi eſt 100, ſecundi 50: Vtrobique ergo eſt proportio dupla.

Qvæst.

QVÆSTIO X.

Invenire infinita Triangulorum rectangulorum paria isoperimetra, in quorum quolibet pari, perimeter sit numerus quadratus, sicut & differentia arearum, & differentia majorum laterum circa rectum.

Cape quodlibet triangulum rectangulum 5. 3. 4. Perimeter est 12. & ejus dimidium 6. Pone igitur 6 + 1N & 6 -- 1N. & singula latera trianguli assumpti ducantur in positiones, fiúntque duo triangula ejusdem speciei 30 + 5N. 18 + 3N. 24 + 4N & 30 -- 5N. 18 -- 3N. 24 -- 4N. quorum duæ perimetri faciunt quadratum infinitè. Restat igitur, ut differentia arearum 144N & differentia majorum laterum circa rectum 8N faciant quadratum. At id non fit, nec facilè quadrato æquari possunt, quia duo numeri 144N & 8N non se habent sicut quadratus ad quadratum.

Quare

Quare eligendum est aliquod triangulum in quo id contingat post operationes prædictas. Sunt autem infinita istiusmodi, ut 25. 7. 24. & 53. 45. 28. & 100. 28. 96. & 212. 180. 112. Capio unum ex his, nempè primum, cujus perimeter est 56, & dimidium 28. & pono 28 + 1 N & 28 -- 1 N pro multiplicibus trianguli accepti. In hos igitur si ducantur singula latera illius trianguli, fiunt duo triangula 700 + 25N. 196 + 7N. 672 + 24N. & 700. -- 25N. 196 -- 7N. 672 -- 24N. quorum perimeter est numerus quadratus 3136. Restat ut arearum differentia 9408N & differentia majorum laterum circa rectum 48N æquentur quadratis. Illi autem numeri 9408N & 48N se habent ut quadratus ad quadratum. Ergo si dividas 48 per aliquem quadratum, ita ut fiat quotiens minor 28, ille quotiens erit valor 1N. Sunt autem innumeri quadrati (4. 9. 16. 25. 36. & quadrati in fractionibus.) Divide igitur 48 per unum ex illis, putà 16, & fit valor 3. Ergo 28 + 1N & 28 -- 1N erunt 31 & 25. in quos ducta latera trianguli assumpti 25. 7. 24. fiunt duo triangula quæsita 625. 175. 600. & 775. 217. 744. Si dividas per 4, fit

fit alius valor 12. Igitur 28 + 1N & 28 -- 1N erunt 40 & 16, in quos ducta latera prædicta exhibent duo alia triangula quæsita 1000. 180. 960. & 400. 112. 384. Reliqua exhibebuntur primò in fractis, sed ad integros reducti demonstrant paria isoperimetra triangulorum rectangulorum, ex infinitis, quæ facile est proferre, scribo duntaxat quatuor.

Primum par. 140625. 39375. 135000. & 174375. 48825. 167400.

Secundum par. 225000. 63000. 216000. & 90000. 25200. 86400.

Tertium par. 187500. 52500. 180000. & 127500. 35700. 122400.

Quartum par. 168300. 47124. 161568. & 146700. 41076. 140832.

Hinc solves sequens Problema. *Invenire duo Triangula rectangula ejusdem speciei, in quibus summa perimetrorum sit numerus quadratus: differentia duorum majorum laterum circa rectum quadrato-quadratus: differentia verò arearum, cubo-cubus.*

Ponantur enim primùm duo triangula superiùs inventa 625 175. 600. & 775. 217. 744. Certum est summam duarum perimetrorum esse quadratum 3136, differentiam

tiam laterum majorum circa rectum 144, & differentiam arearum 28224. Ducantur ſingula latera in 144QQ, fient duo triangula 90000QQ. 25200QQ. 86400QQ. & 111600QQ. 31248QQ. 107136QQ, in quibus ſumma perimetrorum eſt quadratus, & differentia majorum laterum circa rectum eſt quadrato-quadratus infinité; Supereſt igitur ut differentia arearum 585252864QQQQ (qui eſt quadratus à latere 24192QQ) æquetur cubo-cubo. Sit ille 1CC, & ſit valor Radicis 585252864. Hæc ſi reſolvatur juxta poſitiones poſtremas, dabuntur duo triangula quæ ſatisfacient quæſtioni.

CAPVT II.

Complectens Problemata singularia, quæ aliud in Triangulo Rectangulo spectant, quàm Aream.

PROBLEMA I.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in unum latus circa rectum, detractus singulis lateribus, faciat quadratos.

PONANTVR temerè 1N + 2 & 1 pro numeris formantibus triangulum. Latera erunt 1Q + 4N + 5. 1Q + 4N + 3. 2N + 4. Summa ex hypotenusâ & tertio latere est 1Q + 6N + 9: quæ ducta in secundum latus 1Q + 4N + 3, facit 1QQ + 10C + 36Q + 54N + 27

+ 27, unde si tollas productum sub extremis 2C + 12Q + 26N + 20, relinquitur 1QQ + 8C + 24Q + 28N + 7, æquandus quadrato. Finge latus 1Q + 4N + 4, & fit valor -- $\frac{7}{4}$. proindéque 1N + 2 & 1 qui fuerunt numeri formantes, erunt -- 1 & 4. & triangulum inde formatum satisfaceret quæstioni.

Sed quoniam professi sumus Nos nolle numeros fictos, inde tutò & sine formidine perveniemus ad numeros reales, ponendo pro numeris formantibus triangulum 1N -- 1 & 4. Latera erunt 1Q -- 2N + 17. 1Q -- 2N -- 15. 8N -- 8. Summa extremorum est 1Q + 6N + 9, quæ ducta in latus secundum 1Q -- 2N -- 15, facit 1QQ + 4C -- 18Q -- 108N -- 135. Inde si tollas productum sub extremis 8C -- 24Q + 152N -- 136, residuum 1QQ -- 4C + 6Q -- 260N + 1 erit æquandum quadrato. Finge latus illius quadrati 1 -- 130N + 1Q. & fit valor 66. Ergo numeri formantes erunt 65 & 4. & triangulum specie 4241. 4209. 520. cujus si singula latera dividantur per 4761 (summa est extremorum) fiet triangulum quæsitum $\frac{4241.\ 4209.\ 520}{4761}$. in quo est productus sub extremis tollendus.

PROBLEMA II.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in aliud latus, additus uni ex minoribus lateribus, & detractus reliquis, faciat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes triangulum, 1N + 2 & 1. Latera sunt, ut in præcedenti, 1Q + 4N + 5. 1Q + 4N + 3. 2N + 4. Productus autem ex summâ extremorum 1Q + 6N + 9 in latus secundum 1Q + 4N + 3, erit 1QQ + 10C + 36Q + 54N + 27, cui si addas productum extremorum 2C + 12Q + 26N + 20, fiet summa 1QQ + 12C + 48Q + 80N + 47 æquanda quadrato. Finge latus 1Q + 6N + 6, & fit pro valore Radicis -- $\frac{11}{6}$. Ergò numeri formantes 1N + 2 & 1, in integris erunt 5 & 8.

Igitur pones nunc sine formidine 1N + 5 & 8 pro numeris formantibus triangulum

gulum. Latera erunt 1Q + 10N + 89. 1Q + 10N -- 39. 16N + 80. Summa extremorum eſt 1Q + 26N + 169, quæ ducta in ſecundum latus 1Q + 10N -- 39, facit 1QQ + 36C + 390Q + 676N -- 6591, cui adde productum extremorum 16C + 240Q + 2224N + 7120, & procreabitur ſumma 1QQ + 52C + 630Q + 2900N + 529 æquanda quadrato. Finge latus 23 + $\frac{1450}{23}$N -- 1Q, & fiet pro valore, $\frac{426}{23}$. Igitur numeri formantes 1N + 5 & 8, in integris, erunt 541 & 184. Hinc formabis triangulum ſpecie 326537. 258825. 199088. cujus ſi latera ſingula dividantur per 525625 (ſumma eſt extremorum) fiet triangulum quæſitum $\frac{326537.\ 258825.\ 199088}{525625}$, in quo productus ſub extremis additus medio lateri, detractus verò hypotenuſæ, atque tertio lateri, exhibebit quadratos.

PROBLEMA III.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in unum latus circa rectum, multatus uno latere, & additus reliquis, faciat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes triangulum 1N + 2 & 1. Latera sunt ut suprà, & differentia extremorum 1Q + 2N + 1, quæ ducta in secundum latus 1Q + 4N + 3, facit 1QQ + 6C + 12Q + 10N + 3. Huic si addas productum sub extremis 2C + 12Q + 26N + 20, extabit summa 1QQ + 8C + 24Q + 36N + 23 æquanda quadrato. Finge latus 1Q + 4N + 4, & habebis -- $\frac{7}{4}$ pro valore Radicis. Igitur 1N + 2 & 1, erunt in integris 1 & 4.

Quare non jam ampliùs temerè, sed tutò pones 1N + 1 & 4 pro numeris formantibus triangulum. Latera erunt 1Q + 2N + 17. 1Q + 2N -- 15. 8N + 8.

Differen

Differentia extremorum 1 Q − 6 N + 9 ducta in secundum latus 1 Q + 2 N − 15, facit 1 QQ − 4 C − 18 Q + 108 N − 135. cui adde productum extremorum 8 C + 24 Q + 152 N + 136, & fit aggregatum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 260 N + 1 æquandum quadrato. Finge latus 1 + 130 N − 1 Q, & fiet pro valore Radicis, $\frac{4223}{66}$. Ergò numeri formantes 1 N + 1 & 4, in integris, erunt 4289 & 264. Hinc formatur triangulum specie 18465217. 18325825. 2264592. cujus si singula latera dividantur per 16200625 (differentia est extremorum) habebitur triangulum quæsitum $\frac{18465217.\ 18325825.\ 2264592}{16200625}$. Si enim productus extremorum multetur tertio latere, & addatur reliquis, fient quadrati.

PROBLEMA IV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in unum ex minoribus lateribus additus hypotenusæ, multatus uno latere circa rectum, & detractus tertio, faciat quadratos.

FOrmetur temerè triangulum ex 1 N + 3 & 1. Latera sunt 1 Q + 6 N + 10. 1 Q + 6 N + 8. 2 N + 6. Differentia extremorum est 1 Q + 4 N + 4, quæ ducta in secundum latus 1 Q + 6 N + 8, facit 1 QQ + 10 C + 36 Q + 56 N + 32, unde si tollas productum extremorum 2 C + 18 Q + 56 N + 60, residuum 1 QQ + 8 C + 18 Q -- 28 est æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 4 N + 1, & fiet -- $\frac{29}{8}$ pro valore Radicis. Igitur numeri formantes 1 N + 3 & 1, in integris erunt -- 5 & 8.

Quare ponendi tutò numeri formantes triangulum 1 N -- 5 & 8. Latera erunt

1 Q

1Q -- 10N + 89. 1Q -- 10N -- 39. 16N -- 80. Differentia extremorum 1Q -- 26N + 169 ducatur in secundum latus 1Q -- 10N -- 39, & fiet productus 1QQ -- 36C + 390Q -- 676N -- 6591. unde si tollas productum extremorum 16C -- 240Q + 2224N -- 7120, habebis residuum 1QQ -- 52C + 630Q -- 2900N + 529 æquandum quadrato. Finge latus 23 -- $\frac{1450}{23}$N + 1Q, fiétque pro valore, $\frac{448391}{9798}$. Igitur 1N -- 5 & 8, qui fuêre numeri formantes triangulum, erunt in integris 399401 & 78384. ac triangulum specie 165665210257. 153377107345. 62613295968. cujus si latera dividantur sigillatim per 10305191428 9 (differentia est extremorum,) fiet triangulum quæsitum $\frac{165665210257.\ 153377107345.\ 62613295968}{103051914289}$. Productus detrahitur secundo lateri, & multatur tertio.

PROBLEMA V.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dimidius productus ex hypotenusâ in unum latus circa rectum, sublatus à duobus majoribus lateribus, & à semisse minoris, relinquat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes 1N + 2 & 1. Latera sunt 1Q + 4N + 5. 1Q + 4N + 3. 2N + 4. Dimidium postremi lateris additum hypotenusæ, facit 1Q + 5N + 7, qui ductus in secundum latus 1Q + 4N + 3, exhibet productum 1QQ + 9C + 30Q + 43N + 21, unde si tollas 1C + 6Q + 13N + 10, seu dimidium productum ex hypotenusâ in tertium latus, relinquitur 1QQ + 8C + 24Q + 30N + 11 æquandus quadrato. Finge latus 1Q + 4N + 4, & fit valor $-\frac{5}{2}$. Ergo numeri formantes 1N + 2 & 1, erunt in integris − 1 & 2.

Quare

Quare tutò pones 1 N -- 1 & 2 pro numeris formantibus triangulum. Latera erunt 1Q -- 2N + 5. 1Q -- 2N -- 3. 4N -- 4. Hujus postremi lateris dimidium 2N -- 2 additum hypotenusæ facit 1Q + 3, quem si ducas in secundum latus 1Q -- 2N -- 3, habebis 1QQ -- 2C -- 6N -- 9. Hinc tolle 2C -- 6Q + 14N -- 10 (dimidium producti ex hypotenusâ in tertium latus,) restabit 1QQ -- 4C + 6Q -- 20N + 1 æquandus quadrato. Finge latus 1 -- 10N + 1Q, & fiet valor 6. Igitur 1N -- 1 & 2 erunt 5 & 2, ex quibus formabis triangulum specie 29. 21. 20. cujus latera divisa per 39 (summa est ex hypotenusâ & semisse tertii lateris) dabunt triangulum quæsitum $\frac{29.\ 21.\ 20}{39}$. Dimidius enim productus ex hypotenusâ in tertium latus, sublatum ex duobus prioribus lateribus, & dimidio tertii, exhibet quadratos.

PRO

PROBLEMA VI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dimidius productus hypotenusæ in unum ex minoribus lateribus, detractus hypotenusæ, & dimidio istius minoris lateris, additus autem reliquo lateri, faciat quadratos.

POnantur temerè numeri formantes triangulum 1N + 2 & 1. Latera sunt 1Q + 4N + 5. 1Q + 4N + 3. 2N + 4. Dimidium hujus postremi 1N + 2 additum hypotenusæ facit 1Q + 5N + 7, quem si ducas in secundum latus facit 1QQ + 9C + 30Q + 43N + 21, cui adde dimidium productum hypotenusæ in tertium latus, nempè 1C + 6Q + 13N + 10, & fiet summa 1QQ + 10C + 36Q + 56N + 31 æquanda quadrato. Finge latus quadrati 1Q + 5N + $\frac{11}{2}$, & fiet -- $\frac{3}{4}$. Itaque numeri formantes 1N + 2 & 1, erunt 5 & 4, unde extabit triangulum specie 41. 9. 40. cujus singula latera divisa per 61, (summa

(ſumma eſt ex hypotenuſâ & $\frac{1}{2}$ lateris tertii) dabunt triangulum quæſitum $\frac{41.\ 9.\ 40}{61}$. Dimidius enim productus extremorum detractus hypotenuſæ, & dimidio tertii, additus autem reliquo, facit quadratos.

PROBLEMA VII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo ſi à minori latere tollatur dimidius productus extremorum, & à quadruplo hypotenuſæ duplum producti, & à quadruplo medii lateris quadruplum producti ejuſdem, fiant quadrati.

POnantur numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 1. Latera ſunt 1 Q + 4N + 5. 1 Q + 4N + 3. 2N + 4. Dimidium poſtremi lateris addatur hypotenuſæ, ut fiat 1 Q + 5N + 7, in quem ducatur quadruplum ſecundi lateris, fitque 4QQ + 36C + 120Q + 172N + 84. Hinc tolle quadruplum producti

extremorum

extremorum 8C + 48Q + 104N + 80, & relinquitur 4QQ + 28C + 72Q + 68N + 4 æquandus quadrato. Finge latus 2 + 17N − 2Q, ſeu majoris facilitatis gratiâ, divide numerum æquandum quadrato per 4, & fiet 1Q + 7C + 18Q + 17N + 1 quadrato æquandus. Finge latus 1 + $\frac{17}{2}$N − 1Q, & fit pro valore $\frac{209}{96}$. Igitur numeri formantes erunt 401 & 96. & triangulum ſpecie inde formatum, 170017. 151585. 76992. cujus ſi latera ſingula dividantur per 208513 (ſumma eſt ex primo latere, & dimidio tertii) fiet triangulum quæſitum. $\frac{170017.\ 151585\ 76992}{208513}$

PRO

PROBLEMA VIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo duplus extremorum productus sublatus à quadruplo hypotenusæ, & triplus quadruplo unius lateris circa rectum additus, & duplus duplo reliqui lateris subtractus, faciat quadratos.

POnantur numeri formantes, ut in præcedente, 1 N + 2 & 1. Latera erunt eadem, & productus sub extremis 2C + 12Q + 26N + 20, cujus triplum 6C + 36Q + 78N + 60 additum quadruplo producto ex secundo latere in summam hypotenusæ & dimidio tertii lateris, facit 4QQ + 42C + 156Q + 250N + 144 æquandum quadrato. Finge latus 12 + $\frac{125}{12}$N + 2Q, & fit valor Radicis, $\frac{73}{48}$. Igitur numeri formantes erunt 169 & 48. Hinc formatur triangulum specie, 30865. 26257. 16224. cujus si latera singula dividantur

vidantur per 38977 (summa est ex hypotenusâ & dimidio tertii lateris) fit triangulum quæsitum $\frac{30865.\ 26257.\ 16224}{38977}$. Triplum producti extremorum additum quadruplo secundi, & duplum ejusdem producti detractum duplo tertii lateris, & quadruplo hypotenusæ, facit quadratos.

Aliter potuit fingi latus $2Q + \frac{21}{2}N + 12$, & valor Radicis fuisset $-\frac{8}{9}$. unde numeri formantes in integris 10. 9. & triangulum specie 181. 19. 180. cujus singula latera divisa per 271. (summa est ex hypotenusâ & dimidio tertii) exhibent triangulum quæsitum $\frac{181.\ 19.\ 180}{271}$.

APPENDIX.

Ex his intelliges, posse tot quæstiones proponi de producto extremorum, quot in priori parte propositæ sunt de areâ diversimodè cum lateribus complicatâ: quod ad alia properanti sufficit indicasse.

PRO

PROBLEMA IX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus differentiæ minorum laterum, vel majorum laterum multatus singulis lateribus, quadratos efficiat.

POnatur pro triangulo quæsito 3 N. 4 N. 5 N. Differentia minorum laterum vel majorum laterum est eadem, nempè 1 N, cujus quadratus 1 Q. Igitur 1 Q -- 3 N. 1 Q -- 4 N. 1 Q -- 5 N æquantur quadratis. Hanc triplicatam æqualitatem revoco ad istam 1 -- 3 N. 1 -- 4 N. 1 -- 5 N. pro quâ, si eligas aliquem numerum quadratorum & Radicum, qui ductus vel in 3, vel in 4, vel in 5, efficiat productum, qui sublatus ab unitate, efficiat quadratum, facilè revocabis triplicatam æqualitatem ad duplicatam: talis autem est numerus sequens 2 N -- 4 Q, hic enim ductus in 4 facit 8 N -- 16 Q, qui detractus 1, facit quadratum 1 -- 8 N + 16 Q, à latere 1 -- 4 N.

-- 4N. Illum igitur numerum 2N -- 4Q duc in 3. 4. 5. ſigillatim, & productos 6N -- 12Q. 8N -- 16Q. 10N -- 20Q tolle ſigillatim ab unitate, & relinquentur tria reſidua 1 -- 6N + 12Q. 1 -- 8N + 16Q. 1 -- 10N + 20Q æquanda quadratis. Eſt autem ſecundum reſiduum quadratum à latere 1 -- 4N. Igitur ſupereſt tantùm ut alia duo reſidua 1 -- 10N + 20Q, & 1 -- 6N + 12Q æquentur quadratis. Hoc verò efficitur facilè per methodum vulgarem duplicatæ æqualitatis, & invenitur valor $\frac{4}{11}$. Hunc valorem ſi reſolvas per 2N -- 4Q (numerus eſt ſuprà electus) fit $\frac{24}{121}$, pro valore Radicis in triplicatâ æqualitate 1 -- 3N. 1 -- 4N. 1 -- 5N. Ergo ſi per hunc poſtremum valorem dividas 1, fiet valor $\frac{121}{24}$ pro triplicatâ æquatione ſequente 1Q -- 3N. 1Q -- 4N. 1Q -- 5N. Quoniam igitur habes valorem Radicis, ſeu numeri, & poſitum eſt triangulum quæſitum 3N. 4N. 5N. Si hunc poſtremum valorem ducas ſigillatim in 3. 4. 5. habebis triangulum quæſitum $\frac{363.\ 484.\ 605}{24}$.

PRO

PROBLEMA X.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratum hypotenusæ multatum singulis lateribus, faciat quadratos.

Ponatur idem triangulum quod suprà 3N. 4N. 5N. Igitur quadratum hypotenusæ est 25Q, quod si multetur tribus lateribus extabunt tres termini 25Q -- 5N. 25Q -- 4N. 25Q -- 3N æquandi quadratis. Ergò 25 -- 5N. 25 -- 4N. 25 -- 3N. imò & 1 -- 5N. 1 -- 4N. 1 -- 3N. æquabuntur quadratis. Istius autem æqualitatis triplicatæ inventus est valor in præcedenti $\frac{24}{121}$; hunc si ducas in 25, fiet $\frac{600}{121}$ pro triplicatâ æqualitate 25 -- 5N. 25 -- 4N. 25 -- 3N. & si per hunc valorem dividas 1, habebis valorem $\frac{121}{600}$ pro æqualitate propositâ 25Q -- 5N. 25Q -- 4N. 25Q -- 3N. Quare juxta positiones, si hunc postremum valorem ducas in 3. 4. 5. sigillatìm, fiet triangulum quæsitum $\frac{363.\ 484.\ 605}{600}$.

PROBLEMA XI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus summæ omnium laterum multatus singulis lateribus faciat quadratos.

ESto idem triangulum quod suprà, 3N. 4N. 5N. Summa laterum est 12 N, cujus quadratus 144Q. Igitur 144Q -- 3N. 144Q -- 4N æquabuntur quadratis. Operare ut in duobus præcedentibus Problematibus, & invenies triangulum quæsitum esse $\frac{363.\ 484.\ 605}{3456}$.

APPENDIX.

Hinc sequitur solutio innumerorum Problematum triangula rectangula spectantium: detur enim quæcumque summa, & quæcumque differentia, imò & quicumque aut laterum, aut summarum, aut differentiarum multiplices, invariatis numeratoribus invenies solutionem, solo denomi-

natore variato, modò non mutes speciem quæstionis. Nec est necesse retexere molestas operationes quæ interdum occurrunt: sed satis erit facere ut quadratum datum in unâ operatione factâ ad denominatorem inventum, ità quadratum datum in operatione faciendâ, ad aliud, & habebitur denominator supponendus iisdem numeratoribus. Vt quia in Problemate 10. datus est quadratus hypotenusæ 25, & inventus est denominator 600. Si detur quadratus summæ omnium 144, fiátque ut 25 ad 600, ità 144 ad aliud, habebis denominatorem 3456. pro quæstione Problem. 11. Simili ratione, si jubeatur inveniri triangulum rectangulum, in quo quadratus summæ laterum circa rectum, multatus singulis lateribus faciat quadratos, accipies 3. 4. 5. in quo quadratus summæ laterum circa rectum est 49. Fiat ut 25 ad 600, ità 49 ad aliud, & invenies 1176 pro denominatore supponendo numeratoribus prædictis 363. 484. 605. Erit igitur triangulum quæsitum $\frac{363.\ 484.\ 605}{1176}$.

PROBLEMA XII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo singula latera addita quadrato differentiæ minorum laterum, vel majorum laterum, efficiant quadratos.

POnatur triangulum quæsitum 3N. 4N. 5N. Differentia minorum, vel majorum laterum est eadem, nempè 1N, cujus quadratum 1Q. Igitur 1Q + 3N. 1Q + 4N. 1Q + 5N debent æquari quadratis. Hanc triplicatam æqualitatem revoco ad istam 1 + 3N. 1 + 4N. 1 + 5N, & pergo, ut factum est in Problematibus superioribus, & invenio valorem Radicis.

Verùm lubet paulò aliter rem totam efficere, & novâ methodo solvere triplicatam æqualitatem 1Q + 3N. 1Q + 4N. 1Q + 5N. Cape 1N + 1 pro valore 1N (sic enim 1N + 1 ductus in 4 numerum Radicum secundi termini efficiet quadratum 1Q + 4N + 4) Duc deinde

de eundem numerum in 3 & 5 juxta poſitiones Radicum, habebíſque 1Q + 3N + 3 & 1Q + 5N + 5 æquandos quadratis. Vtere methodo vulgari, & invenies valorem $-- \frac{11}{8}$. Iam igitur pones pro novâ Radice 1N $-- \frac{11}{8}$, & juxta illam reſolves duos terminos mox quadrato æquatos, extabúntque novi termini quadrato æquandi 1Q + $\frac{1}{4}$N + $\frac{49}{64}$ & 1Q + $\frac{9}{4}$N + $\frac{1}{64}$, & ducendo hunc poſteriorem in 49, fient 49Q + $\frac{441}{4}$N + $\frac{49}{64}$. Quoniam ergo illi duo numeri ſunt reducti ad eundem unitatum quadratum, cape illorum differentiam 48Q + 110N, hæc producitur ex ductu 8N in 6N + $\frac{55}{4}$ (adverte diligenter modum iſtum ſolvendi duplicatas æqualitates.) Reliqua ſunt facilia, & fit pro valore, $\frac{93}{28}$. Hinc tolle $\frac{11}{8}$ ob novam Radicem, de quâ ſuperiùs, reſtabítque fractio $\frac{109}{56}$. Hæc juncta unitati, ſi dividat ſuum quadratum $\frac{11881}{3136}$, exhibebit valorem $\frac{11881}{9240}$ pro primis poſitionibus. Cùm itaque triangulum poſitum ſit 3N. 4N. 5N. ſi poſtremam fractionem ducas in 3. 4. 5. ſigillatim, fiet triangulum quæſitum $\frac{35643.\ 47524.\ 59405}{9240}$.

PROBLEMA XIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus majoris lateris circa rectum, additus ſingulis lateribus faciat quadratos.

SVmatur triangulum rectangulum 3 N. 4N. 5N. Majus latus circa rectum eſt 4N, & ejus quadratum 16Q. Igitur 16Q + 3N. 16Q + 4N. 16Q + 5N æquantur quadratis. Finge 1N æquivalere 2N + $\frac{1}{4}$, & per hunc numerum multiplica 3. 4. 5. fiéntque tres producti, qui additi 16Q dabunt ſummas 16Q + 6N + $\frac{3}{4}$. 16Q + 8N + 1. 16Q + 10N + $\frac{5}{4}$ æquandas quadratis. At medius terminus 16Q + 8N + 1 eſt quadratus à latere 4N + 1. Igitur ſupereſt ut duo alii æquentur quadrato. Et fit per methodum vulgarem -- $\frac{11}{64}$ pro valore. Quare pones pro novâ Radice 1N -- $\frac{11}{64}$, & juxta illam reſolves duos terminos mox æquatos quadrato, fiéntque novi termini 16Q + $\frac{9}{2}$N + $\frac{1}{256}$ &

& $16Q + \frac{1}{2}N + \frac{49}{255}$. Et quia in istiusmodi operatione debet esse idem unitatum numerus quadratus, priorem terminum duces in 49, ut fiat $784Q + \frac{441}{2}N + \frac{49}{256}$. Horum terminorum quadrato æquandorum differentia est $768Q + 220N$, quam producunt $32N$ & $24N + \frac{55}{8}$ (adverte rursùs subtilem modum capiendi producentes differentiam.) Horum producentium summæ semissis quadratus majori termino æquatus, dat pro valore $\frac{93}{224}$. Ergo nova Radix $1N - \frac{11}{64}$ est $\frac{109}{448}$. & $2N + \frac{1}{4}$ est $\frac{370}{448}$. Ergo quadratus prioris fractionis divisus per posteriorem dabit valorem pro primis positionibus, nempè $\frac{11881}{147840}$. Igitur juxta positiones 3N. 4N. 5N. triangulum quæsitum non latebit, erítque illud $\frac{35643.\ 47524.\ 59405}{147840}$.

PROBLEMA XIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus summæ laterum omnium additus singulis lateribus, faciat quadratos.

POnatur triangulum quæsitum 3N. 4N. 5N. Summa est 12N, & ejus summæ quadratum 144Q. Igitur juxta tenorem quæstionis 144Q + 3N. 144Q + 4N. 144Q + 5N æquantur quadratis. Sequere quam volueris methodum ex duabus, quæ sunt traditæ in Problematibus præcedentibus, & invenies triangulum quæsitum, esse $\frac{59405.\ 35643.\ 47524}{1330560}$.

APPENDIX.

Hinc rursùs sequitur solutio innumerabilium Problematum, quæ triangula rectangula spectant: neque opùs est retexere operationes, quæ interdum sunt molestissimæ, sed brevi compendio poteris uti

uti per Regulam auream; etenim si fiat ut quadratum in operatione factâ ad denominatorem inventum, ità quadratum datum in operatione faciendâ, ad aliud, habebis novum denominatorem iisdem numeratoribus supponendum. Vt quia in Prob. 13. ex quadrato 16 inventus est denominator 147840, fiat ut 16 ad 147840, ità 144 ad aliud, & invenies denominatorem 1330560 pro Problemate 14. Rursùs si quis vellet triangulum rectangulum in quo centuplum quadrati summæ laterum additum singulis lateribus faciat quadratos, fiat ut 16 ad 147840, ità 14400 ad aliud, & inveniret denominatorem 133056000 iisdem numeratoribus 35643. 47524. 59405 supponendum.

PRO

PROBLEMA XV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex minori latere in differentiam duorum majorum, additus singulis lateribus, faciat quadratos.

INveniatur primò triangulum rectangulum, in quo productus ex differentiâ duorum majorum in minus latus, faciat quadratum: hoc autem duobus modis fieri poteſt, vel dum differentia prædicta & minus latus ſunt quadrati, vel cùm ſunt plani ſimiles. Triangulum primi generis 9.40.41. Triangulum ſecundi generis eſt 8. 15. 17. Sumo itaque primum ex triangulis, & pono triangulum quæſitum eſſe 9N. 40N. 41N. Productus enim ex minore latere 9N in differentiam majorum laterum 1N, facit 9Q quadratum à latere 3N. Igitur 9Q+9N.9Q+40N.9Q+41N.æquari debent quadratis.Operare ut in præcedentibus,& invenies triangulum quæſitum $\frac{27846729.\ 123763240.\ 126857321}{2316195}$.

APPEN

APPENDIX.

Duo hîc adverte, primum poſſe ex hoc Problemate fieri duo præcedentia Problemata : non tamen converſim ex illis poteſt fieri iſtud. Secundum eſt, poſſe innumerabilia Problemata ex hoc naſci, ut facilè infertur ex præcedenti appendice.

PROBLEMA XVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenuſâ in differentiam laterum minorum, additus ſingulis lateribus, faciat quadratos.

INveniatur primò triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenuſâ in differentiam laterum circa rectum, faciat quadratum. Hoc rursùm duobus modis fieri poteſt, aut cùm hypotenuſa eſt numerus quadratus, & differentia duorum aliorum laterum, aut cùm ſunt plani ſimiles. Eligo in hoc opus, triangulum rectangulum

gulum 119. 120. 169. in quo hypotenusa 169. & differentia laterum minorum 1, sunt quadrati : ac pono pro triangulo quæsito 119N. 120N. 169N. Ergò hypotenusa 169N in differentiam duorum minorum 1N facit 169Q quadratum à latere 13N. ac proinde 169Q + 119N. 169Q + 120N. 169Q + 169N. æquari debent quadratis. Perge in operatione, ut suprà demonstratum est, & invenies tandem triangulum quæsitum $\frac{1669396916987I.\ 16834254625080.\ 2370824193032I}{550440092592}$.

APPENDIX.

Hinc rursùs numerosa seges Problematum nascitur, siquidem modò retineantur eadem latera per additionem connectenda, potest variari quadratum, ut libuerit.

PRO

PROBLEMA XVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex minore latere in differentiam duorum majorum, multatus ſingulis lateribus, faciat quadratos.

POnatur triangulum quæſitum 8N. 15N. 17N. quia, ut dictum eſt ſuprà, productus qui poſtulatur, quadratus eſt, nam 8N in 2N (ſeu minus latus in differentiam majorum) facit quadratum 16Q, cujus latus eſt 4N. Igitur 16Q -- 8N. 16Q -- 15N. 16Q -- 17N æquari debent quadratis. Ergo horum productus ſolidus 4096QQQ -- 10240 S + 8176QQ -- 2040C æquandus eſt quadrato. Et quia quadratus dividens quadratum dat quadratum in quotiente, fit, ut ſi numerus ille dividatur per 4Q, exhibeat 1024QQ -- 2560C + 2044Q -- 510N æquandum quadrato. Finge latus 32Q -- 40N + $\frac{111}{16}$. Et fit pro valore, $\frac{2369}{1280}$. Cùm itaque poſitum ſit triangulum

gulum quæsitum 8N. 15N. 17N. ducendo valorem inventum in 8. 15. 17 sigillatim, deprehendes triangulum quæsitum esse $\frac{10952.\ 20535\ 23273}{1280}$. Aliter potest institui operatio, & invenietur triangulum diversæ speciei à præcedente, eligendo videlicèt triangulum quæsitum 9N. 40N. 41N. sic enim 9Q -- 9N. 9Q -- 40N. 9Q -- 41N. debebunt æquari quadratis. Majoris facilitatis gratiâ sumo 1Q -- 9N. 1Q -- 40N. 1Q -- 41N. Hæc triplicata æqualitas resolvetur, ponendo 1N æquivalere $\frac{1}{20}$N -- $\frac{1}{40}$. sic enim medius terminus per eam novam Radicem explicatus æquabitur quadrato à latere 1N -- 1. Reliqui autem duo termini per eandem novam Radicem explicati, erunt 1Q -- $\frac{9}{20}$N + $\frac{9}{40}$, & 1Q -- $\frac{41}{20}$N + $\frac{41}{40}$ æquandi quadrato. Ac per methodum Diophanti valor Radicis in istâ duplicatâ æqualitate, est $\frac{43}{50}$. Igitur pro nova Radice capio 1N + $\frac{43}{50}$, & juxta illam resolvo terminos quadrato æquatos, fiúntque duo novi termini quadrato æquandi, nempè 1Q -- $\frac{33}{100}$N + $\frac{1}{625}$, & 1Q + $\frac{127}{100}$N + $\frac{361}{625}$. Ducto igitur priore per 361, fiunt 361Q -- $\frac{11913}{100}$N + $\frac{361}{625}$. Differentia est 360Q -- $\frac{602}{5}$N, quam producunt 18N & 20N -- $\frac{301}{45}$.

-- $\frac{301}{45}$. Horum igitur producentium summæ semissis quadratus majori termino æquatus, dat pro valore, $\frac{2148061}{1611675}$. Igitur nova Radix erit $\frac{35341015}{16116750}$, proindéque cùm supposuerimus 1 N æquivalere $\frac{1}{20}$N -- $\frac{1}{40}$, hæc resoluta dabit aliam fractionem, $\frac{1364132}{16116750}$. Prioris fractionis quadratum divide per fractionem posteriorem, & habebis valorem pro primis positionibus, $\frac{49959493649209}{7914734787960}$. Quapropter cùm positum sit triangulum quæsitum 9N. 40N. 41N. si illum postremum valorem ducas in 9. 40. 41. sigillatim, triangulum quæsitum erit $\frac{449635442842881.\ 1998379745968360.\ 2048339239617569}{7914734787960}$.

Aliter rursùs, & quidem clarissimè, reducendo triplicatam æqualitatem 9Q--9N. 9Q -- 40N. 9Q -- 41N ad sequentem 1 -- 9N. 1 -- 40N. 1 -- 41N. Terminos illos tres æquandos quadratis multiplica solidè, productúmque 1 -- 90N + 2369Q -- 14760C æqua quadrato, & finge illius quadrati latus 1 -- 45N + 172Q, & fit valor $\frac{45}{1849}$. quem duc in 9, & fit valor $\frac{405}{1849}$, pro æqualitate triplicatâ 9 -- 9N. 9 -- 40N. 9 -- 41N. Ac tandem per hunc postremum valorem divide unitatem, & fit valor $\frac{1849}{405}$ pro 9Q -- 9N. 9Q -- 40N. 9Q -- 41N. Cùm igitur triangulum quæsitum fuerit

N po

positum 9N. 40N. 41N. si postremum valorem ducas in 9. 40. 41, fiet triangulum quæsitum $\frac{16641.\ 73960.\ 75809}{405}$.

PROBLEMA XVIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in differentiam duorum minorum laterum, multatus singulis lateribus, faciat quadratos.

ESto illud triangulum 119N. 120N. 169N. Igitur productus ejusmodi erit 169Q. ac proinde 169Q -- 119N. 169Q -- 120N. 169Q -- 169N æquabuntur quadratis. Illa æqualitas triplicata revocetur ad istam 1 -- 119N. 1 -- 120N. 1 -- 169N. & tres isti termini multiplicentur inter se solidè, vt fiat productus 1 -- 408N + 54671Q -- 2413320C æquandus quadrato. Finge latus 1 -- 204N + $\frac{23055}{2}$Q. & pro valore Radicis fit fractio sequens $\frac{39984}{6817321}$. Hæc itaque fractio est valor pro triplicatâ æqualitate 1 -- 119N. 1 -- 120N. 1 -- 169N.

Atque

Atque hujusce rei examen factum est. Quare si hunc valorem ducas in 169, fiet $\frac{6757296}{6817321}$, pro valore sequentis æqualitatis 169 -- 119N. 169 -- 120N. 169 -- 169N. Denique si per hunc secundum valorem dividas 1, fiet tertius valor, nempè $\frac{6817321}{6757296}$, pro valore triplicatæ æqualitatis 169Q -- 119N. 169Q -- 120N. 169Q -- 169N. Quare cùm posuerimus triangulum quæsitum 119N. 120N. 169N. si hunc tertium valorem ducas in 119. 120. 169. sigillatim, habebis triangulum quæsitum $\frac{811261199.\ 818078520.\ 1152127249}{6757296}$.

Alia methodus, de quâ suprà diximus, dabit pro secundâ solutione triangulum, cujus tres numeratores erunt 20225609451277802276098504646876. 20395572557910388849847231572480. 28723764682907130963534850927076: & denominator communis 13597404108443574927853700492 8.

APPENDIX.

Hinc quoque nascitur ingens multitudo Problematum, quibus supersedeo. Vide appendicem Probl. 11. & 14.

PROBLEMA XIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex minori latere in differentiam duorum majorum multatus extremis lateribus, & auctus medio, faciat quadratos.

POnatur triangulum quæſitum 9N. 40N. 41N. Igitur 9Q -- 9N. 9Q + 40N. 9Q -- 41N. æquabuntur quadratis, ac (per ea quæ jàm non ſemel dicta ſunt) 1 -- 9N. 1 + 40N. 1 -- 41N. Ductis ergo tribus iſtis poſterioribus terminis in ſe ſolidè, fit 1 -- 10N -- 1631Q + 14760C æquandus quadrato. Finge latus 1 -- 5N -- 828Q, & fit pro valore fractio $\frac{405}{42849}$. Hanc fractionem duc in 9, ac per productum divide unitatem, habebíſque $\frac{42849}{3645}$. pro valore Radicis, in primis poſitionibus. Quarè cùm poſitum ſit triangulum rectangulum 9N. 40N. 41 N, erit triangulum quæſitum, $\frac{385641.\ 1713960.\ 1756809}{3645}$.

PRC

PROBLEMA XX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex minori latere in differentiam majorum laterum, multatus duobus majoribus lateribus, & auctus minore, faciat quadratos.

Ponatur triangulum 8N. 15N. 17N. Minus latus est 8N. Differentia majorum est 2N. Productus illorum 16Q. Igitur 16Q + 8N. 16Q -- 15N. 16Q -- 17N. æquantur quadratis. Ergo & 1 + 8N. 1 -- 15N. 1 -- 17N. Horum productus solidus 1 -- 24N -- 1Q + 2040C est quadrato æquandus. Finge latus 1 -- 12N -- $\frac{145}{2}$Q. & fit pro valore istius posterioris æqualitatis, fractio, $\frac{48}{841}$. Hanc fractionem si ducas in 16. fit secundus valor $\frac{768}{841}$, éstque valor æqualitatis triplicatæ sequentis 9 + 8N. 9 -- 15N. 9 -- 17N. Per hunc valorem divide 1, & habebis tertium valorem, pro primâ æqualitate triplicatâ 16Q + 8N. 16Q -- 15N. 16Q -- 17N. éstque $\frac{841}{768}$. Igitur

juxta positiones, triangulum quæsitum est $\frac{6728.\ 12615.\ 14297}{758}$.

PROBLEMA XXI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex minore latere in differentiam majorum, multatus duobus minoribus lateribus, & auctus hypotenusâ, faciat quadratos.

Esto triangulum quæsitum 9 N. 40 N. 41 N. Igitur 9Q -- 9N. 9Q -- 40N. 9Q + 41 N. æquantur quadratis: sicuti etiam 1 -- 9N. 1 -- 40N. 1 + 41 N. In hâc posteriori æqualitate, productus solidus est 1 -- 8N -- 1649Q + 14760 C æquandus quadrato. Finge latus 1 -- 4N -- $\frac{1665}{2}$Q, & valor Radicis habebit sequentem fractionem $\frac{1296}{110887}$, pro æqualitate posteriori 1 -- 9N. 1 -- 40N. 1 + 41 N. Ducto autem illo primo valore in 9, fit valor secundus pro æqualitate 9 -- 9N. 9 -- 40N. 9 + 41 N. divisáque unitate per hunc secundum valorem, fit tertius valor pro nostrâ

ſtrâ æqualitate 9Q -- 9N. 9Q -- 40N. 9Q + 41N, éſtque poſtremus iſte valor $\frac{110889}{11664}$. Ergo juxta poſitiones, triangulum quæſitum erit $\frac{998001.\ 4435560.\ 4546449}{11664}$.

PROBLEMA XXII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in differentiam minorum laterum, multatus extremis, & auctus medio, faciat quadratos.

Esto triangulum quæſitum 119N. 120N. 169N. Igitur 169Q erit productus, qui poſtulatur, atque ideò 169Q -- 119N. 169Q + 120N. 169Q -- 169N æquandi erunt quadratis: ſicuti etiam 1 -- 119N. 1 + 120N. 1 -- 169N. Hanc poſteriorem æqualitatem reſolvo per multiplicationem ſolidam trium ipſius terminorum, productus enim illinc natus 1 -- 168N -- 14449Q + 2413320C æquari debet quadrato. Finge latus 1 -- 84N -- $\frac{21505}{2}$Q, & fit pro valore $\frac{97104}{18498601}$. Atque hic valor aptatur triplicatæ

catæ æqualitati 1 -- 119N. 1 + 120N. 1 -- 169N. Hunc valorem inventùm duc in 169, & fiet secundus valor pro triplicatâ æqualitate sequenti 169 -- 119N. 169 + 120N. 169 -- 169N. Nimirùm $\frac{16410576}{18498601}$. Denique si unitatem dividas per hunc secundum valorem, fiet tertius valor pro primis positionibus, eritque $\frac{18498601}{16410576}$. Quare cùm triangulum fuerit positum 119N. 120N. 169N. erit illud triangulum quæsitum $\frac{2201333519.\ 2219832120.\ 3126263569}{16410576}$.

PROBLEMA XXIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in differentiam duorum laterum minorum auctus hypotenusâ, & multatus duobus minoribus sigillatim, faciat quadratos.

POnatur triangulum quæsitum 119N. 120N. 169N. Manifestùm est hypotenusam 169N in differentiam minorum laterum

laterum 1N, facere 169Q, quadratum à latere 13N. Supereſt igitur ut 169Q -- 119N. 169Q -- 120N. 169Q + 169N æquentur quadratis. Horum trium terminorum productus ſolidus 1 --- 70N --26111Q + 241332cC æquetur quadrato, fingendo latus 1 -- 35N -- 13668Q, & fiet pro valore, $\frac{91025}{11675889}$. Hunc ſi ducas in 169, extabit valor ſecundus, pro hâc triplicatâ æqualitate 169 -- 119N. 169 -- 120N. 169 + 169N. ac tandem, ſi per hunc ſecundum valorem dividas 1, fiet tertius valor, qui ab initio quæritur, utpotè $\frac{11675889}{27060804}$. Igitur juxta poſitiones, multiplicando hunc tertium valorem per 119. 120. 169. habebis triangulum quæſitum $\frac{1389430791.\ 1401106680.\ 1973225241}{27060804}$.

PROBLEMA XXIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in differentiam laterum minorum, multatus duobus majoribus lateribus, & auctus minore, faciat quadratos.

SVmatur, ob rationem dictam in superioribus, triangulum 119 N. 120 N. 169 N. Productus enim postulatus erit 169 Q quadratum à latere 13 N. Igitur 169Q + 119N. 169Q − 120N. 169Q − 169 N æquabuntur quadratis. Veluti etiam 1 + 119N. 1 − 120N. 1 − 169N. Sisto in hâc posteriori triplicatâ æqualitate, & ejus terminos tres duco in se solidè, productus est 1 − 170N − 14111Q + 2413320C æquandus quadrato. Finge latus 1 − 85N − 10668Q, & fit pro valore $\frac{37485}{7112889}$. Atque hic valor primus solvit triplicatam æqualitatem sequentem 1 + 119N. 1 − 120N. 1 − 169N. Hunc si ducas in 169, fiet secundus valor, pro æqualitate

æqualitate triplicatâ 169 + 119N. 169 -- 120N. 169 -- 169N. Per hunc secundum valorem divide 1, & habebis valorem tertium, qui quæritur pro primis positionibus, nempè, $\frac{7112889}{6334965}$. Quare juxta positiones triangulum quæsitum erit $\frac{846433791.\ 853546680.\ 1202078241}{6334965}$.

PROBLEMA XXV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo singula latera suis quadratis detracta, efficiant quadratos.

POnatur triangulum quæsitum 3N. 4N. 5N. Hæc latera ab suis quadratis subtracta efficient 9Q -- 3N. 16Q -- 4N. 25Q -- 5N. æquandos quadratis. Hæc triplicata æqualitas, dempto ubique charactere quadrati, revocetur ad sequentem 9 -- 3N. 16 -- 4N. 25 -- 5N. Deinde quoniam numeri quadratorum sunt diversi, ità inter se illi aptentur, ut sit idem numerus unitatum quadratus, illæsâ æqualitate. Hoc autem fiet, si primus terminus ducatur

ducatur in quadratum 400, secundus in quadratum 225, tertius in quadratum 144. ità enim fient 3600 -- 1200 N. 3600 -- 900N. 3600 -- 720N. Loco 3600 cape 1, & solve triplicatam æqualitatem sequentem 1 -- 1200N. 1 -- 900N. 1 -- 720N. Hæc verò solvetur vel per multiplicationem solidam illorum terminorum, (quod sæpiùs factitatum est in præcedentibus) vel, ut varietur operatio, fingendo 1 N æquivalere $\frac{1}{600}$N -- $\frac{1}{1200}$Q: sic enim per resolutionem, primus terminus erit 1 -- 2N + 1Q. quadratus à latere 1 -- 1N. Reliqui verò termini resoluti, erunt æquandi quadrato: secundus est 1 -- $\frac{3}{2}$N + $\frac{3}{4}$Q, tertius autem 1 -- $\frac{6}{5}$N + $\frac{3}{5}$Q. Hæc duplicata æqualitas solvitur per methodum vulgarem, & invenitur pro valore Radicis, $\frac{5474}{6753615}$. Ita enim extat valor primus pro triplicatâ æqualitate 1 -- 1200 N. 1 -- 900 N. 1 -- 720N. Ergo si hunc primum valorem ducas in 3600 (numerum videlicèt, in cujus locum subrogata est unitas) fiet secundus valor pro triplicatâ æqualitate 3600 -- 1200N. 3600 -- 900N. 3600 -- 720N, itémque pro 9 -- 3N. 16 -- 4N. 25 -- 5N. Secundus ille valor est $\frac{19705400}{6753615}$, vel in minimis

mis $\frac{1313760}{450241}$. Igitur si dividas 1, per hunc secundum valorem, extabit tertius valor quæsitus pro primis positionibus, eritque $\frac{450241}{1313760}$. Quare cùm sit positum triangulum 3N. 4N. 5N. ducendo tertium valorem sigillatim in 3. 4. 5. triangulum postulatum erit $\frac{1350723.\ 1800964.\ 2251205}{1313760}$.

PROBLEMA XXVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo tria latera suis quadratis sigillatim addita, efficiant quadratos.

ESto illud triangulum 12N. 5N. 13N. Ergo 144Q + 12N. 25Q + 5N. 169Q + 13N æquari debent quadratis. Igitur tollendo characterem quadrati 144 + 12N. 25 + 5N. 169 + 13N. quadratis æquantur. Hæc ità inter se aptentur ut idem sit ubique unitatum quadratus, ducendo primum terminum in 4225, secundum in 24336, tertium verò in 3600, ità enim extabunt 608400 + 50700N. 608400 + 121680N. 608400 + 46800N.

æquandi

æquandi quadratis. Sicuti etiam 1 + 50700N. 1 + 121680N. 1 + 46800N. Hos tres terminos duc in ſe ſolidè, fiétque productus 1 + 219180N + 1423656000Q + 28871743680000C æquandus quadrato. Finge latus 1 + 109590N + 1113295950Q, ità enim pro valore, fiet fractio, $\frac{447052304790}{12394278722864025}$, quæ ſolvit poſtremam æqualitatem triplicatam, nam 1 + 50700N facit quadratum à latere 187242705: & 1 + 121680N facit quadratũ à latere 258440715: & 1 + 46800N facit quadratum à latere 182527605. Ergo ſi hunc valorem primum ducas in 608400, fiet pro valore ſecundo, $\frac{2719866222342360000}{12394278722864025}$, pro triplicatâ æqualitate ſequente 608400 + 50700N. 608400 + 121680N. 608400 + 46800N. Itémque pro 144 + 12N. 25 + 5N. 169 + 13N. Et dividendo 1 per hunc ſecundum valorem, extabit tertius valor $\frac{12394278722864025}{2719866222342360000}$, pro triplicatâ æqualitate propoſitâ 144Q + 12N. 25Q + 5N. 169Q + 13N. Igitur triangulum rectangulum, quod poſitum fuit 12N. 5N. 13N. erit

$$\frac{148731344674368300.\ 61971393614520125.\ 161125623397232325}{2719866222342360000}.$$

PRO

PROBLEMA XXVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo majus latus circa rectum, suo additum quadrato, reliqua verò latera suis detracta quadratis sigillatim, efficiant quadratos.

Sit illud triangulum 3N. 4N. 5N. Ergo 9Q -- 3N. 16Q + 4N. 25Q -- 5N debent æquari quadratis. Reducantur illa ad eundem quadratum, & fient 3600Q -- 1200N. 3600Q + 900N. 3600Q -- 720N. Igitur & tres sequentes termini 1 -- 1200N. 1 + 900N. 1 -- 720N æquabuntur quadratis. In hâc posteriori æqualitate, si supponatur 1N æquivalere $\frac{1}{600}$N -- $\frac{1}{1200}$Q, fiet per resolutionem, primus terminus 1 -- 2N + 1Q, reliqui autem duo termini erunt 1 + $\frac{3}{2}$N -- $\frac{3}{4}$Q. & 1 -- $\frac{6}{5}$N + $\frac{3}{5}$Q. Hæc duplicata æqualitas per methodum Diophanti dat pro valore, $\frac{1840}{2249}$. Igitur $\frac{1}{600}$N -- $\frac{1}{1200}$Q, æquantur fractioni, $\frac{15134}{23400025}$, juxta quam

quam 1 -- 1200N. 1 + 900N. 1 -- 720N æquantur quadratis. Si itaque hæc fractio ducatur in 3600, fiet valor secundus pro triplicatâ æqualitate 3600 -- 1200N. 3600 + 900N. 3600 -- 720N, itémque pro 9 -- 3N. 16 + 4N. 25 -- 5N. Iste secundus valor dividens 1, exhibet tertium valorem, pro triplicatâ æqualitate propositâ 9Q -- 3N. 16Q + 4N. 25Q -- 5N. Hic porrò tertius valor est $\frac{1560001}{3632160}$, & explicat primas positiones. Igitur cùm triangulum sit positum ab initio 3N. 4N. 5N, si tertium valorem ducas in 3. 4. 5. sigillatìm, fiet triangulum quæsitum $\frac{4680003.\ 6240004.\ 7800005}{3632160}$.

PROBLEMA XXVIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo minus latus additum suo quadrato, reliqua autem duo suis detracta quadratis, faciant quadratos.

POnatur triangulum 3N. 4N. 5N. Igitur 9Q + 3N. 16Q -- 4N. 25Q -- 5N æquantur quadratis. Si reducas illos ad eundem

eundem quadratum, fient 3600Q + 1200N. 3600Q -- 900N. 3600Q -- 720N quadratis æquandi. Vnde ſequitur 1 + 1200N. 1 -- 900N. 1 -- 720N quadratis æquari. Tres hi termini ſolidè multiplicati, dant productum 1 -- 420N -- 1296000Q + 777600000C æquandum quadrato. Finge latus 1 -- 210N -- 670050Q, & fit pro valore, $\frac{4951790}{4489670025}$. Hic verò valor primus ſolvit triplicatam æqualitatem 1 + 1200N. 1 -- 900N. 1 -- 720N. Duc illum primum valorem in 3600, & fiet valor ſecundus pro triplicatâ æqualitate ſequenti 3600 + 1200N. 3600 -- 900N. 360 -- 720N. Per hunc ſecundum valorem divide unitatem, & habebitur valor tertius, qui quæritur, nempè $\frac{4489670025}{17862444000}$. Cùm igitur triangulum poſitum ſit 3N. 4N. 5N. habebis triangulum quæſitum $\frac{13469010075.\ 17958680100.\ 22448350125}{17862444000}$.

O PRO

PROBLEMA XXIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenusa addita suo quadrato, minora autem latera suis detracta quadratis, efficiant quadratos.

ESto triangulum illud 3N. 4N. 5N. Ergo juxta quæstionis tenorem, 9Q -- 3N. 16Q -- 4N. 25Q + 5N æquantur quadratis, atque etiam 1 -- 1200N. 1 -- 900N. 1 + 720N. ob rationem in præcedentibus allatam. Istius triplicatæ æqualitatis productus solidus 1 -- 1380N -- 432000Q + 777600000C est quadrato æquandus. Finge latus 1 -- 690N -- 454050Q. & fit pro valore, $\frac{1510110}{2061614025}$. Iste autem valor primus solvit triplicatã æqualitatem 1 -- 1200N. 1 -- 900N. 1 + 720N. Si autem hunc valorem primum ducas in 3600, fiet valor secundus pro triplicatâ æqualitate 3600 -- 1200N. 3600 -- 900N. 3600 + 720N. Per hunc valorem secundum divide 1, & habebis valorem tertium pro primis positionibus,

tionibus, nimirùm $\frac{2061614025}{5436396000}$. Cùm itaque triangulum quæſitum fuerit poſitum 3N. 4N. 5N. erit illud $\frac{6184842075.\ 8246456100.\ 10308070125}{5436396000}$.

PROBLEMA XXX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dati multiplices minorum laterum additi quadratis minorum laterum, hypotenuſa autem detracta ſuo quadrato, faciant quadratos. Detur duplus majoris lateris circa rectum, & triplus minoris.

Ponatur illud triangulum 3N. 4N. 5N. Ergo 9Q + 9N. 16Q + 8N. 25Q -- 5N. æquantur quadratis. Reducantur tres illi termini ad eundem numerum quadratum, ducendo primum in 400, ſecundum in 225, tertium verò in 144, & fient tres termini æquandi quadratis 3600Q + 3600N. 3600Q + 1800N. 3600Q -- 720N. Igitur 3600 + 3600N. 3600 + 1800N. 3600 -- 720N æquabuntur

O 2 qua-

quadratis, ſicuti etiam 1 + 3600N. 1 + 1800N. 1 -- 720N. Hujus poſterioris triplicatæ æqualitatis tres terminos duco in ſe ſolidè, & fit productus 1 + 4680N + 259200Q -- 4665600000C æquandus quadrato. Finge latus 1 + 2340N -- 1441800Q, & fit pro valore, fractio, $\frac{20820240}{2078787400}$, quæ ſolvit triplicatam æqualitatem 1 + 3600N. 1 + 1800N. 1 -- 720N. Hunc primum valorem duc in 3600, & fiet valor ſecundus pro 3600 + 3600N. 3600 + 1800N. 3600 -- 720N. atque etiam pro 9 + 9N. 16 + 8N. 25 -- 5N. Per hunc ſecundum valorem divide 1, & habebis tertium valorem, qui quæritur ab initio, nempè $\frac{20787872400}{7495286400}$. Itaque triangulum quod fuit 3N. 4N. 5N. erit $\frac{62363617200.\ 83151489600.\ 105500162000}{7495286400}$.

APPENDIX.

Omitto ſexcenta Problemata, quæ de iſtiuſmodi multiplicibus fieri poſſunt, ſatíſque mihi eſt illa digito indicaſſe.

PRO

PROBLEMA XXXI.

Invenire duo Triangula diversæ speciei, in quorum quolibet tùm hypotenusa, tum differentia laterum circa rectum, faciat quadratos.

Ponantur numeri formantes primum triangulum 1 N & 1. Latera erunt 1Q + 1. 1Q -- 1. 2N. Tollatur secundum latus à tertio, fiétque duorum minorum laterum differentia 1 + 2N -- 1Q æquanda quadrato, sicut etiam hypotenusa 1Q + 1. Tollatur hæc ab illâ, erit igitur differentia quadratorum 2N -- 2Q, quam producunt 1N & 2 -- 2N: ac proinde illorum summa erit 2 -- 1N. Hujus ergo summæ semissis quadratum æquatum 1 + 2N -- 1Q, dat pro valore Radicis $\frac{12}{5}$: ac proinde numeri formantes erunt 12 & 5. & triangulum quæsitum 169 119. 120.

Pono nunc pro numeris formantibus secundum triangulum 1N -- 5 & 12. Latera erunt 1Q -- 10N + 169. 1Q -- 10N

 -- 119.

-- 119. 24N -- 120. Tollatur tertium latus à secundo, & habebitur differentia minorum laterum 1Q -- 34N + 1 æquanda quadrato, veluti etiam hypotenusa 1 Q -- 10N + 169. Quare horum duorum productus 1 QQ -- 44C + 510Q -- 5756N + 169 est quadrato æquandus. Finge latus 1 Q -- 22N -- 13, & fit pro valore Radicis, $\frac{1521}{13}$. Ergo 1 N -- 5 & 12, seu numeri formantes erunt in integris, 1517 & 156. triangulúmque secundum quæsitũ 2325625. 2276953. 473304.

Idem triangulum invenietur fingendo latus 13 -- $\frac{2878}{13}$N + 1 Q.

PROBLEMA XXXII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo tum minus latus, tum differentia, & summa majorum, faciat quadratos.

FAcillimum est hoc Problema, & solvi potest infinitè. Quare aliqua tantùm exhibeo: Primum 9. 40. 41. Secundum 16, 30.

30. 34. Tertium 25. 312. 313. Quartum 49. 1200. 1201. Quintum 144. 270. 306. Sextum 225. 272. 353.

Huic affinis est sequens quæstio, quam feliciter admodùm exequutus est illustris Senator Parlamenti Tholosani *D. De Fermat. Invenire Triangulum rectangulum, in quo tùm hypotenusa, tùm summa laterum circa rectum, faciant quadratos.* Est verò istiusmodi triangulum 4687298610289. 4565486027761. 1061652293520.

PROBLEMA XXXIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenusa sit numerus quadratus, & datus multiplex unius lateris circa rectum additus alteri lateri, faciat quadratum. Detur iste multiplex, sextuplus.

POnantur numeri formantes triangulum quæsitum 1N + 2 & 1. Latera erunt 1Q + 4N + 5. 1Q + 4N + 3. 2N + 4.

 Hujus

Hujus postremi lateris capiatur sextuplum 12N + 24, & adjiciatur lateri secundo 1Q + 4N + 3. Summa est 1Q + 16N + 27. æquanda quadrato, sicut & hypotenusa 1Q + 4N + 5. Horum igitur productus 1QQ + 2cC + 96Q + 188N + 135 quadrato æquandus erit. Finge latus 1Q + 10N − 2, & pro valore, fit $\frac{131}{228}$. Igitur numeri formantes 1N + 2 & 1, erunt in integris 325 & 228, unde formabis triangulum quæsitum 157609. 53641. 148200.

PROBLEMA XXXIV.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus hypotenusa sit numerus quadratus, & datus multiplex unius lateris circa rectum detractus alteri circa rectum, faciat quadratum. Detur duplus.

Ponantur temerè 1N + 1 & 1 pro numeris formantibus triangulum quæsitum. Latera erunt 1Q + 2N + 2. 1Q + 2N, 2N + 2. Hujus tertii lateris duplum

plum 4N + 4 tollatur à secundo latere 1Q + 2N, & residuum 1Q -- 2N -- 4 æquetur quadrato; sicut & hypotenusa 1Q + 2N + 2. fietque per istam æqualitatem methodo vulgari resolutam, valor $-\frac{17}{11}$. Igitur 1N + 1 & 1 erunt in integris -- 5 & 12.

Quarè tutò pones pro numeris formantibus triangulum quæsitum 1N -- 5 & 12. Latera erunt 1Q -- 10N + 169. 1Q -- 10N + 119. 24N -- 120. ac proinde si duplum postremi 48N -- 240 detrahatur lateri secundo, residuum 1Q -- 58N + 121 erit æquandum quadrato, sicut & hypotenusa 1Q -- 10N + 169. Sive ergò sumas illorum productum, & æques quadrato, sive utaris duplicatâ æqualitate vulgari, fient utrobique duo numeri formantes 4593455. 46046. unde formabitur triangulum quæsitũ 19343046113329. 18732418687921. 48218174004000.

PROBLEMA XXXV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus ex minoribus sit quadratum, & idem latus additum dato multiplici alterius lateris circa rectum, faciat quadratum. Detur multiplex, triplus.

FOrmetur illud triangulum ab 1N + 1 & 1. Latera erunt 1Q + 2N + 2. 1Q + 2N. 2N + 2. Triplum postremi hujus lateris est 6N + 6, quod additum secundo lateri 1Q + 2N, facit 1Q + 8N + 6 æquandum quadrato, sicut & secundum latus 1Q + 2N. Hi duo termini in se ducti faciunt 1QQ + 10C + 22Q + 12N, qui quadrato æquari debet. Finge latus 1Q + 5N − $\frac{1}{2}$, & fit valor $\frac{1}{12}$. & juxta positiones, fiet triangulum quæsitum 313. 25. 312.

PROBLEMA XXXVI.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus unum latus ex minoribus, sit quadratum, & idem latus dato multiplice alterius lateris circa rectum multatus, faciat quadratum. Detur multiplex, triplus.

VTere triangulo in Propositione præcedenti invento 313. 25. 312. quod formatur ab 13 & 12. & forma triangulum quæsitum ab 1N -- 13 & 12. Latera erunt 1Q -- 26N + 313. 1Q -- 26N + 25. 24N -- 312. Hujus postremi lateris triplum secundo lateri detractum relinquit 1Q -- 98N + 361, quod est æquandum quadrato, sicut & secundum latus 1Q -- 26N + 25. Illi duo termini ducantur in se invicem, & fit productus 1QQ -- 124C + 3534Q -- 27436N + 24025 æquandus quadrato. Finge latus 1Q -- $\frac{13718}{155}$N + 155, & pro valore fiet $\frac{27681731}{318370}$. Ergo numeri formantes 1N -- 13 & 12, erunt in integris 2354292 1 &

& 3820440, ex quibus formatur triangulum quæsitum 5688648710058 41. 5396733674186 41. 179888634210480.

PROBLEMA XXXVII.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus unum latus ex duobus minoribus sit quadratum, alterius autem lateris circa rectum, simplum, & duplum, hypotenusæ detractum, faciat quadratos.

Formetur illud triangulum ab 1N -- 5 & 4. Latera erunt 1Q -- 10N + 41. 1Q -- 10N + 9. 8N + 40. Igitur sumamus medium pro quadrato, nempè 1Q -- 10N + 9, & tertium latus semel ac bis detrahatur hypotenusæ, fient 1Q -- 18N + 81 & 1Q -- 26N + 121. Tres igitur illi sunt quadratis æquandi. At 1Q -- 18N + 81 est quadratus à latere 1N -- 9. Igitur superest, ut duo alii termini 1Q -- 26N + 121 & 1Q -- 10N + 9

+ 9 quadratis æquentur. Quoniam ergo utrobique numerus unitatum quadratus est, vel per mutuam illorum multiplicationem, vel per duplicatam æqualitatem vulgarem æquari possunt quadratis, vel sanè per aliam quandam subtiliorem, de quâ non semel jam dixi; sumatur enim illorum terminorum differentia (postquam reducti fuerint ad eundem unitatum quadratum:) differentia hæc erit $\frac{112}{9}Q - \frac{976}{9}N$, quam producunt $\frac{8}{3}N$, & $\frac{14}{3}N - \frac{122}{3}$ (adverte subtilem omninò rationem eligendi producentes.) Horum producentium summæ semissis quadratum, majori termino æquatum, dabit pro valore, $\frac{658}{33}$. Ergo numeri formantes erunt 493 & 132. & triangulum quæsitum est 260473. 225625. 130152.

PRO

PROBLEMA XXXVIII.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus unum latus circa rectum sit numerus quadratus, alterius autem lateris minoris simplum, & duplum, hypotenusæ additum, faciat quadratos.

FOrmetur triangulum ab 1 N + 1 & 1. Latera erunt 1 Q + 2 N + 2. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. Sumatur ergò postremum latus pro eo, quod debet semel ac bis addi hypotenusæ. Igitur 1 Q + 6 N + 6. & 1 Q + 2 N debent æquari quadratis. Ex hâc autem duplicatâ æqualitate oritur valor $\frac{1}{4}$. ac proinde numeri formantes 1 N + 1 & 1 erunt 5 & 4. à quibus formatur triangulum quæsitum 41. 9. 40.

PROBLEMA XXXIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dati multiplices unius lateris circa rectum, additi & detracti alteri lateri circa rectum, efficiant quadratos. Detur ſextuplus addendus, & quadruplus detrahendus.

FOrmetur triangulum ab 1N + 1 & 1. Latera erunt 1Q + 2N + 2. 1Q + 2N. 2N + 2. Sextuplus hujus poſtremi lateris 12N + 12 additus ſecundo lateri, facit 1Q + 14N + 12, quadruplus autem ejuſdem 8N + 8 detractus eidem facit 1Q -- 6N -- 8. Summa igitur illa, & hoc reſiduum, debet æquari quadrato, & fit per methodum vulgarem, 12 pro valore Radicis; unde numeri formantes erunt 13 & 1. & triangulum 170. 168. 26.

Si quæras triangulum, cujus unum latus additum quater & detractum bis, faciat quadratos, erit illud per eandem methodum 26. 24. 10.

Denique

Denique si postuletur addi centies unum latus, & detrahi decies, hoc erit 2291194. 2287144. 136170.

PROBLEMA XL.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dati multiplices unius lateris circa rectum additi & detracti hypotenusæ, efficiant quadratos. Detur sextuplus addendus, & quadruplus detrahendus.

Eadem facilitate absolvetur Problema istud, ac præcedens absolutum est. Formetur enim triangulum ab 1N + 1 & 1. Latera sunt 1Q + 2N + 2. 1Q + 2N. 2N + 2. Ergo sextuplum hujus postremi additum hypotenusæ, facit 1Q + 14N + 14. quadruplum autem detractum eidem, facit 1Q -- 6N -- 6. proindéque tàm summa, quàm residuum, debet æquari quadrato, & fit valor 11, per æqualitatem vulgarem. Ergo juxta positiones formabitur triangulum quæsitum ab 12 & 1, crúntque latera 145.143.24.

PRO

PROBLEMA XLI.

Invenire duo Triangula rectangula, in quorum utroque summa laterum circa rectum sit æqualis: & talia, ut hypotenusa unius sit æqualis uni lateri circa rectum alterius.

Formetur unum ex triangulis postulatis ab 1N + 1 & 1. Latera sunt 1Q + 2N + 2. 1Q + 2N. 2N + 2. Pro altero autem triangulo, sit unum latus circa rectum 1Q + 2N + 2, (nempe hypotenusa primi) & tollatur à summa laterum 1Q + 4N + 2, residuum est 2N pro altero latere circa rectum secundi trianguli. Igitur horum duorum laterum quadrata simul juncta faciunt summam 1QQ + 4C + 12Q + 8N + 4 æquandam quadrato (nimirùm quadrato hypotenusæ secundi trianguli.) Finge latus 1Q + 2N + 4, & fit $-\frac{3}{2}$ pro valore Radicis. Quare pono pro novâ Radice 1N $-\frac{3}{2}$, & juxta illam resolvo singulas particulas termini

quadrato æquati, ſitque novus terminus $1QQ - 2C + \frac{15}{2}Q - \frac{29}{2}N + \frac{169}{16}$ quadrato æquandus. Finge latus $1Q - \frac{29}{13}N + \frac{13}{4}$, & fiet pro valore Radicis, $\frac{21}{13}$. Ergo juxta poſitiones, primum triangulum erit 1517. 165. 1508. ſecundum autem 1525. 1517. 156. Numeri formantes prius triangulum ſunt 29 & 26.

PROBLEMA XLII.

Invenire duo Triangula rectangula, in quorum primo ſumma laterum circa rectum, æquetur differentiæ laterum circa rectum ſecundi: & talia, ut hypotenuſa primi æquetur uni laterum circa rectum, ſecundi.

FOrmetur triangulum primum ab $1N - 29$ & 26. (datâ operâ illos eligo, qui formaverunt prius triangulum in quæſtione præcedente.) Ergò latera ſunt $1Q - 58N + 1517$. $1Q - 58N + 165$. $52N - 1508$. Tùm ſumo hypotenuſam

1Q

1Q -- 58N + 1517, pro uno latere circa rectum, secundi trianguli. Ex tertio latere 52N -- 1508 tollo 1Q -- 58N + 165 (hoc est latus secundum primi:) sic enim habetur differentia -- 1Q + 110N -- 1673: Hæc addita 1Q -- 58N + 1517 facit majus latus secundi trianguli 52N -- 156. Ergò illorum duorum quadrata simul juncta faciunt 1QQ -- 116C + 9102Q -- 192196N + 2325625 æquandum quadrato. Finge latus 1Q -- 58N -- 1525, & fit valor 42: Igitur juxta positiones primum triangulum erit 845. 507. 676. & secundum 2197: 2028: 845. En alia duo quæstioni propositæ facientia satis. Primum 5. 3: 4. Secundum 13. 5. 12.

Huic quæstioni affinis est subtilissima quæstio, quam *D. De Fermat* solvit ingeniosissimè, & concipitur his verbis: *Invenire duo Triangula rectangula, quæ habeant eandem differentiam laterum circa rectum; & talia, ut majus latus circa rectum unius, sit æquale hypotenusæ alterius.* Vnum triangulum est 2150905. 2138136. 234023: alterum verò 2165017. 2150905. 246792.

PROBLEMA XLIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum, ſit cubus, ſicut & ſumma duorum aliorum; aggregatum autem omnium laterum faciat quadratum.

QVæſtio iſta facilis eſt. Ponantur enim tria latera 1. 2N. 8 -- 2N. ut tribus poſtulatis ſtatim ſatisfiat. Supereſt itaque tantùm, ut ſint latera trianguli rectanguli: ad hunc autem ſcopum duobus modis perveniri poteſt: vel ſumendo tertium latus pro hypotenusâ, vel ſumendo ſecundum latus pro eâdem hypotenusâ. Sumamus igitur primò tertium latus 8 -- 2N pro hypotenusâ. Ergo ejus quadratum 64 -- 32N + 4Q æquatur 1 + 4Q (quadrata ſunt aliorum laterum ſimul juncta) & fit 1N æqualis $\frac{63}{32}$. & inde triangulum in integris 16. 63. 65. ductíſque ſingulis lateribus in 4, fit triangulum quæſitum 64. 252. 260. Sumamus deinde ſecundum latus,

tus, nempè 2N, pro hypotenuſâ, ejus igitur quadratum 4Q æquabitur 65 -- 32N + 4Q, & fit valor $\frac{65}{32}$. Ergò inde extat idem triangulum, quod ſuprà. 64. 252. 260. Minus latus eſt cubus, à latere 4. Summa duorum aliorum eſt quoque cubus, à latere 8. & ſumma omnium quadratus, à latere 24.

Sic per iſtas poſitiones 4. 2N. 121 -- 2N. invenietur triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum ſit quadratus, ſicut & ſumma reliquorum, perimeter autem ſit cubus. Tria latera erunt $\frac{968.\ 14625.\ 14657}{242}$.

PROBLEMA XLIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum differat cubo ab hypotenuſâ: alterum autem latus additum ſemel & ſexies hypotenuſæ; detractum verò quater & ſemel hypotenuſæ eidem, faciat quadratos.

FAcillimè expedietur iſtud Problema, ſi priùs inveneris quadratum aliquod,

cujus duplum sit cubus (sunt autem infinita, nimirùm 4. 256. 16384. 1048596.) Capio igitur unum ex illis, puta 4, & ejus latus 2: & pono pro numeris formantibus triangulum quæsitum 1 N + 2 & 2. Latera sunt 1 Q + 4 N + 8. 1 Q + 4 N. 4 N + 8. Patet autem duo priora latera differre cubo 8. Sextuplum tertii lateris est 24 N + 48. & quadruplum ejusdem est 16 N + 32. Primus ille productus additus hypotenusæ facit 1 Q + 28 N + 56. Secundus productus eidem hypotenusæ detractus relinquit 1 Q -- 12 N -- 24. Oportet igitur tantùm, ut hæc summa & hoc residuum æquentur quadrato (reliqua enim duo postulata, ex rei naturâ, faciunt quadratos:) ex illâ autem duplicatâ æqualitate, per methodum vulgarem, prodit valor 22. Igitur numeri formantes sunt 24 & 2. & inde fit triangulum quæsitum 580. 572. 96.

PRO

PROBLEMA XLV.

Invenire Triangulum rectangulum diversæ speciei ab 3. 4. 5. & 20. 21. 29. in quo medium latus differat cubo à majore & minori latere.

FOrmetur illud triangulum, ut præcedens, ab 1N + 2 & 2. Latera sunt 1Q + 4N + 8. 1Q + 4N. 4N + 8. Manifestum est duo priora latera differre cubo 8. Restat ergo ut differentia duorum posteriorum 1Q -- 8 sit cubus. Ac primùm potest ille terminus æquari cubo 8, & fit valor 4, unde extaret triangulum 40. 32. 24. Verùm illud est ejusdem speciei cum triangulo 5. 4. 3. Vt igitur succedat istud negotium, quærendus est cubus, cui si addatur 8, fiat alius quadratus quàm 16. Esto igitur latus illius cubi 1N + 2, ejus cubus 1C + 6Q + 12N + 8 addatur 8, ut fiat summa 1C + 6Q + 12N + 16: summa hæc æquari debet quadrato. Finge latus 4 + $\frac{3}{2}$N, & fit valor -- $\frac{15}{4}$. Sed quo-

P 4 niam

niam lubet ab ejusmodi praxibus ablegare numeros fictos, pono pro novâ Radice 1 N -- $\frac{15}{4}$ & juxta illam resolvo terminum mox quadrato æquatum, fitque novus terminus æquandus quadrato, nempè 1 C -- $\frac{21}{4}$ Q + $\frac{147}{16}$ N + $\frac{169}{64}$. Finge latus $\frac{13}{8}$ + $\frac{147}{52}$ N, & pro valore, fit $\frac{35805}{2704}$. Igitur 1 N -- $\frac{15}{4}$ erit $\frac{25665}{2704}$. Quare 1 N + 2 (qui fuit latus cubi qui quæritur) erit $\frac{31073}{2704}$. Hujus fractionis cubus debet æquari 1 Q -- 8, & fit $\frac{5491823}{140608}$. Igitur numeri formantes triangulum 1 N + 2 & 2 in integris erunt 5773039 & 281216. & latera trianguli quæsiti 33407061734177. 33248896856865. 3246941870848. Enim verò duo priora latera differunt cubo, cujus radix est 5408: duo autem posteriora differunt cubo, cujus radix est 31073.

PRO

PROBLEMA XLVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo tàm summa laterum circa rectum, quàm summa hypotenusæ & unius lateris, faciat cubum.

FOrmetur triangulum ex 2 & 1N. Latera sunt 4 + 1Q. 4 -- 1Q. 4N. sic enim satisfit uni postulato, ut per se patet; Siquidem summa duorum priorum laterum est 8, cubus à radice 2. Summa verò duorum posteriorum est 4 + 4N -- 1Q æquanda cubo. Et quia cubus in cubum ductus, facit cubum, si ducatur 4 + 4N -- 1Q in 64, productus 256 + 256N -- 64Q debet æquari cubo: æquetur 343, qui cubus est à latere 7, & fiet 1N æquatis $\frac{3}{8}$. Igitur numeri formantes 2 & 1N erunt 16 & 3, ac triangulum quæsitum 265. 247. 96.

PROBLEMA XLVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenuſa cum alterutro latere circa rectum, faciat cubum.

Adverte triangulum ſequens 5. 3. -- 4. eſſe primitivum, & ſatisfacere quæſtioni: ſed quia numerus poſterior fictus eſt, propterea eligo pro numeris formantibus triangulum quæſitum 2 & 1 N -- 1. (quia videlicèt 2 & 1 ſunt numeri formantes triangulum 5. 3. 4.) Latera ſunt 5 -- 2N + 1Q. 3 + 2N -- 1Q. 4N -- 4. Duo igitur priora latera faciunt cubum infinitè: hypotenuſa verò cum tertio latere facit 1 + 2N + 1Q æquandum cubo. Finge latus 1 -- $\frac{2}{3}$ N, & fit valor -- $\frac{9}{2}$. & numeri formantes in integris 16 & -- 17.

Quare iteranda eſt operatio, & ponendi numeri formantes 16 & 1N -- 17. Latera trianguli ſunt 545 -- 34N + 1Q. -- 33 + 34N -- 1Q. 32N -- 544. Duo priora latera faciunt cubum 512. Reſtat ergò ut ſumma

summa extremorum 1 -- 2N + 1Q æquetur cubo. Adverte autem, hunc numerum æquandum cubo, quadratum esse, à latere 1 -- 1N: quare eligendus erit cubo-quadratus, ut inveniatur æquatio. Capio ad hoc negotium 729, qui æquatus cum 1 -- 2N + 1Q dat pro valore 28. Igitur numeri formantes 16 & 1N -- 17. erunt 16 & 11. & triangulum quæsitum 377. 135. 352. En aliud quod satisfacit, 71149. 46500. 53851.

PROBLEMA XLVIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenusa multata uno latere circa rectum, & aucta alio, faciat cubos.

ADverte triangulum 5. -- 3. -- 4. esse primitivum, & satisfacere quæstioni. Sed propter numeros fictos, pono 1N -- 1 & 2, pro numeris formantibus triangulum. Latera sunt 1Q -- 2N + 5. 1Q -- 2N -- 3. 4N -- 4. sic enim secundum latus sublatum ab

ab hypotenusâ, facit cubum 8. Eadem autem hypotenusa aucta tertio latere facit 1Q + 2N + 1 æquandum cubo. Est verò ille numerus quadratus à latere 1N + 1. Igitur debet esse quadrato-cubus: sit ille 729, & pro valore Radicis fiet 26. ac proinde numeri formantes 1N -- 1 & 2, erunt 25 & 2: & triangulum quæsitum 629. 621. 100. Hypotenusa enim multata secundo, & aucta tertio latere facit cubos 8 & 729. En aliud 40. 32. 24.

PROBLEMA XLIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo minus latus ductum in summam ac differentiam reliquorum sigillatim, faciat quadratos: ductum verò in summam omnium laterum, faciat cubum, ita tamen, ut in eo triangulo nullum latus sit quadratum.

HAnc postremam conditionem addo, ut reddatur quæstio paulò difficilior; nam cùm suprà in Probl. 32. hujus

hujus, dederim plurima triangula rectangula, in quibus tum minus latus, tum summa, ac differentia reliquorum laterum, sint numeri quadrati, statim appareret quo modo solvi deberet Problema propositum.

Cape igitur pro triangulo quæsito 8Q. 15Q. 17Q, sic enim satisfit tribus postulatis; Primò enim certum est nullum ex his lateribus quadratum esse: Secundò minus latus 8Q ductum in summam reliquorum 32Q, facit 256QQ quod est quadratum à latere 16Q. Tertiò idem minus latus 8Q ductum in differentiam reliquorum 2Q facit 16QQ quadratum à latere 4Q. Restat ergo, ut si idem minus latus 8Q ducatur in summam trium laterum 40Q, efficiat cubum; efficit autem 320QQ. Igitur productus ille est æquandus cubo: sit ille cubus 1C. Igitur 1N æquatur $\frac{1}{320}$, cujus quadratum ductum in 8. 15. 17. dat triangulum quæsitum $\frac{8.\ 15.\ 17}{102400}$.

PRO

PROBLEMA L.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex majore latere circa rectum in summam aliorum, sit cubus: & productus extremorum additus hypotenusæ, multatus autem minore extremo, faciat quadratos.

FOrmetur illud triangulum ab 1 N + 1 & 2. Latera erunt 1Q + 2N + 5. 1Q + 2N -- 3. 4 N + 4. Summa duorum priorum est 2 Q + 4 N + 2, quæ ducta in tertium latus 4 N + 4, facit 8C + 24Q + 24N + 8, qui est cubus infinitè, à latere 2 N + 2. Igitur quicumque numerus supra unitatem accipietur pro valore Radicis, efficietur triangulum, in quo summa duorum laterum ducta in tertium dabit cubum. Capiatur 3 pro valore Radicis, efficientur numeri formantes 4 & 2. Igitur triangulum erit 20. 12. 16. & ita satisfactum

est

eſt uni poſtulato. Sed quoniam requiritur inſuper, ut productus extremorum additus majori extremo, & multatus minore, faciat quadratos, dividendo ſingula latera trianguli prædicti per 8, habebitur triangulum quæſitum -- $\frac{20.\ 12.\ 16}{8}$. En aliud $\frac{13.\ 5.\ 12}{8}$.

APPENDIX.

Poſtulatum eſt in Problemate triangulum rectangulum, in quo majus latus circa rectum in ſummam aliorum laterum ductum, faciat cubum: quia ſi illud poſtuletur de minore, nihil facilius. Enimverò ſi formetur triangulum à duobus numeris ſolâ unitate diſtantibus, illud tale erit, ut productus ex minore latere in ſummam reliquorum laterum, faciat cubum, & differentia duorum majorum laterum erit cubus, quia productus ex duobus majoribus lateribus auctus hypotenusâ, multatus autem majore latere circa rectum, quadratos facit. Hoc videre eſt in triangulis ſequentibus: Primum ſit 3. 4. 5. Secundum 5. 12. 13. Tertium

7. 24.

7. 24. 25. Quartum 9. 40. 41. Quintum 11. 60. 61. Facile eſt innumera proferre. Ratio primæ partis eſt, quia in his omnibus, ſumma duorum majorum laterum æquatur quadrato minoris lateris: igitur minus latus in ſummam aliorum ductum, facit cubum. Ratio partis ſecundæ allata eſt ſuperiùs, quia ſi duo numeri quicumque dividantur per eorum differentiam, productus illorum auctus majore, & multatus minore, exhibet quadratos: cùm igitur differentia hæc in noſtrâ hypotheſi, ſit unitas, quæ ſive per multiplicationem, ſive per diviſionem, relinquit numeros intactos & eoſdem, horum minor detractus, & major additus illorum producto, dabit quadratos in reſiduo, & in ſummâ.

PRO

PROBLEMA LI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenusa & differentia hypotenusæ atque alterius lateris circa rectum, sint cubi: productus autem ex reliquo latere in summam aliorum sit iterùm cubus; ac prætereà productus ex duobus majoribus hypotenusâ auctis, multatus autem majore latere circa rectum, efficiat quadratos.

ADverte primò, omnia triangula rectangula, quæ formantur ex binario, & alio numero binarium superante, esse ejusmodi, ut unum ex minoribus lateribus, ductum in summam aliorum, faciat cubum, cujus latus est productus numerorum formantium. Vt quia 3 & 2 formant triangulum rectangulum 13. 5. 12. Si ducatur 12 in summam aliorum laterum 18, fiet 216, cubus à latere 6, qui est productus 3 in 2. Rursùs quia 4 & 2 formant trian-

gulum 20. 12. 16. Si ducas 16 in summam aliorum 32, fiet 512. cubus à latere 8, qui est productus 4 in 2. Idem est de triangulis 29. 21. 20. & 40. 32. 24 & 53. 45. 28. ac de omnibus aliis.

Adverte secundò, omnia illa triangula habere duo priora latera differentia cubo 8, sive duplo quadrato numeri 2. Igitur quadratus 4 additus sibi ipsi, facit cubum, ac proinde inveniri potest alius quadratus, quam 4, qui additus sibi ipsi faciat cubum.

Illud autem præstabitur in hunc modum. Finge latus quadrati inveniendi esse 1 N + 2 (2 est latus 4.) Ejus quadratus est 1 Q + 4 N + 4, huic quadrato adde 4, summa est 1 Q + 4 N + 8 æquanda cubo. Finge latus cubi 2 + $\frac{1}{3}$N (2 est latus cubi 8, in numero æquando contenti: $\frac{1}{3}$N autem est quotiens natus ex divisione 4 N in eodem numero æquando contenti, per triplum quadratum numeri 2.) & fit 9, pro valore Radicis. Ergo latus quadrati, quod positum est 1 N + 2, erit 11: & ejus quadratum 121 assumens 4, facit cubum 125.

Quare ad quæstionem initio propositam, formandum erit triangulum ab 11

& 2,

& 2, fiétque triangulum rectangulum 125. 117. 44. cujus si singula latera dividantur per 8 (hæc est differentia duorum priorum laterum,) habebitur triangulum quæsitum : nam & hypotenusa est cubus, & differentia duorum priorum laterum, & productus ex tertio latere in summam aliorum. Deinde productus duorum majorum laterum auctus hypotenusâ; & multatus majore latere circa rectum, quadratos facit : Imò, quod non postulavimus in Problemate, productus ille duorum majorum laterum auctus hypotenusâ, facit cubum 1. Quare cùm jam ostensum sit illum esse quadratum, necesse erit illum esse quadrato-cubum.

APPENDIX.

Innumera sunt istiusmodi triangula rectangula, quia sunt innumeri quadrati, quorum duplum efficit cubum : tales sunt 256. 2916. 16384. 62500. Addi possunt quot libuerit. Igitur per operationem in Problemate explicatam, inveniri possunt quotlibet triangula rectangula, quæ satisfaciant quæstioni. Imò compendium breve

erit, si triangulum inventum ducas in quemcunque cubum, & singula latera dividas per differentiam priorum laterum. Ità ducendo 125. 117. 44 in cubum 8, fiet triangulum 1000. 936. 352. cujus si latera dividantur per 64 (differentiam duorum priorum laterum) fit triangulum quæsitum. Idem est de quocunque alio cubo.

PROBLEMA LII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo alterutrum latus circa rectum, ductum in summam reliquorum, faciat cubum: productus autem duorum majorum laterum auctus majore, & multatus minore, faciat quadratos.

DVo hîc supponenda sunt, quæ jam suprà explicavimus. Primum est, si triangulum formetur à duobus numeris quibuscumque solâ unitate distantibus, minus latus ductum in summam aliorum, facere cubum. Secundum est, si formetur triangulum à binario, & ab alio numero binarium superante, unum ex minoribus lateribus,

ribus, ductum in summam aliorum, facere cubum: istud porrò latus de quo in secundâ suppositione loquimur, aliquandò est majus circa rectum, ut in triangulo 16. 12. 20. & aliquandò minus, ut in triangulo 20. 21. 29. & in omnibus triangulis isto superioribus, in quibus 2 est unus ex numeris formantibus triangulum. Si itaque reperiatur aliquod triangulum, quod formetur ex duobus numeris, qui solâ unitate distent, & inter quos minor sit binarius, erit illud, quòd quærimus. Tale autem est 13. 5. 12: formatur enim ex 3 & 2. Igitur 13. 5. 12. est triangulum quæsitum.

APPENDIX.

Adverte innumera alia triangula istiusmodi posse inveniri: etenim capiendo quadrantem alicujus cubi, prò uno ex numeris formantibus triangulum, & alium qui unitate superet quadrantem istum assumptum, fiet quod postulatur. Vt si inventi cubi 64, capiatur quadrans 16, & formetur ttiangulum ex 17 & 16. fiet 545. 33. 544. Rursùs si capiatur cubi 216, quadrans 54, & formetur triangulum rectangulum

ex 55 & 54, fiet 5941. 109. 5940. Simili ratione si cubi 512 sumatur quadrans 128, & formetur triangulum ex 129 & 128, fiet 33025. 257. 33024. Idem est de cubis imparibus 27. 125. 343: illorum enim quadrans cum eodem quadrante aucto unitate exhibet duos numeros triangulum formantes. Addi potest in Problemate, ut differentia majoris & minoris lateris sit cubus.

PROBLEMA LIII.

Invenire duo Triangula rectangula, in quibus si bases ducantur inter se, aut perpendicula, fiant cubi.

POnantur prioris trianguli latera circa rectum 1N & 8, posterioris verò 1Q & 27: sic enim satisfit duplici postulato, nam & basis in basim, & perpendiculum in perpendiculum, facit cubum. Tùm quia omnis quadratus in suam radicem, facit cubum, tùm etiam quia productus duorum cuborum cubus est: sunt autem post 1, cubi 8 & 27 omnium simplicissimi, & statim obvii

obvii. Supereſt igitur ut quadrata laterum circa rectum æquentur quadratis. Ergo primùm 1Q + 64 æquentur quadrato. Manifeſtum eſt autem 1Q + 64 æquatum quadrato 100, dare 6 pro valore 1N. Igitur ut in æquatione poſterioris termini 1QQ + 729, prodeat idem valor, debebit ille terminus æquari 2025, nectendo videlicèt quadratum 729 cum quadrato-quadrato 6, qui eſt 1296. Quare utrobique prodit idem valor 6. ideóque duo triangula quæſita ſunt 10. 8. 6. & 45. 27. 36.

PROBLEMA LIV.

Invenire quotlibet Triangula rectangula, quorum baſes & perpendicula ducta ſigillatim in baſim & perpendiculum primi, efficiant cubos.

Ponantur latera primi, ut ſuprà, 1N & 8. Sint verò latera ſecundi 8Q & 216: ſic enim ſatisfit duobus poſtulatis: ſiquidem manifeſtum eſt 1N ductam in 8Q, facere 8C cubum à latere 2N. Prætereà

cùm 8 & 216 ſint cubi, horum quoque productus, cubus erit. Quare ſupereſt ut ſint latera triangulorum rectangulorum: ad hoc autem oportet ut quadrata laterum primi 1 Q + 64 æquentur quadrato, & quadrata laterum ſecundi 64 QQ + 46656 æquentur etiam quadrato. Æquetur prior terminus 1Q + 64 quadrato 100, poſterior verò 64 QQ + 46656 quadrato 129600, & fiet utrobique 6 pro valore 1 N. Igitur triangulum primum erit 10. 8. 6. & ſecundum 360. 216. 288.

Rursùs ſi volueris aliud, pones 1N & 8 pro lateribus circa rectum primi, & pro lateribus circa rectum tertii 64Q + 1728, ſic enim 1N in 64Q, & 8 in 1728 facient cubos. Igitur cùm certum ſit 1Q + 64 æquatum 100, exhibere valorem 6. Supereſt ut 4096QQ + 2985984 æquetur quadrato: ſit ille 8294400, fiétque idem valor 6. Ergo triangulum tertium erit 2880. 1728. 2304. Si tertium ducas in 8, fiet quartum 23040. 13824. 18432. Si iſtud ducas in 8, fiet 184320. 110592. 147456. Si hoc ducas in 8, confiet aliud novum; Et ſic deinceps in infinitum.

PRO

PROBLEMA LV.

Invenire duo Triangula rectangula, in quibus unum latus circa rectum cujuslibet trianguli ductum in hypotenusam alterius, faciat cubum.

FAcilis est ista quæstio. Ponatur enim primi trianguli hypotenusa 9N, & latus primi 27. Igitur per 53. hujus, si sumatur 5 pro valore Radicis, extabit primum triangulum 45. 27. 36. Iam pro secundo triangulo, ponatur hypotenusa 3375, & latus 81 Q (sic enim latus istud ductum in hypotenusam primi 9N, facit cubum 729C, & latus primi 27 ductum in hypotenusam secundi 3375, facit etiam cubum 91125, à latere 45, ob rationes superiùs allatas.) Quare superest ut quadratum lateris secundi trianguli detractum suæ hypotenusæ, faciat quadratum. Igitur 11390625 -- 6561QQ debet æquari quadrato : Æquetur 7290000, & fit valor 5, ut in priori : ac proinde duo

Q 5 trian

triangula sunt 45. 27. 36. & 3375. 2025. 2700.

APPENDIX.

Adverte, primum triangulum ità se habere respectu secundi, ut non tantùm latus secundum primi in hypotenusam secundi, & vicissim latus secundum secundi, in hypotenusam primi faciant cubos: sed etiam latus secundum primi in latus tertium secundi, ac latus secundum secundi, in latus tertium primi, quadratos efficiunt. Quare per eosdem numeros solvitur Problema sequens. *Invenire duo triangula, in quibus latus secundum unius ductum in hypotenusam alterius faciat cubum, idem autem latus ductum in tertium latus alterius, efficiat quadratum.*

PRO

PROBLEMA LVI.

Invenire quotlibet Triangula rectangula, in quibus unum latus circa rectum unius ductum in hypotenusam alterius, faciat cubos.

OStendi in Problemate 54. quomodo per novas positiones, res ista fieri possit: nunc lubet idem præstare compendiosè per multiplicationem. Si enim tria latera secundi trianguli 3375. 2025. 2700, illic inventi, duxeris in secundum latus primi 27, efficietur tertium triangulum 91125. 54675. 72900. Si autem tertii latera ducantur in 27, fiet quartum. Si quarti latera rursùs ducantur in 27, extabit quintum; Et sic deinceps in infinitum.

PROBLEMA LVII.

Invenire duo Triangula rectangula, in quibus hypotenusæ ductæ invicem faciant cubum: basis verò in basem, & perpendiculum in perpendiculum, faciant quadratos.

ADverte duo triangula posteriora in præcedenti Problemate exhibita, cum eo ordine laterum, quem hîc attexímus, illa enim satisfaciunt quæstioni.

3375.	2025.	2700.
91125.	72900.	54675.

PROBLEMA LVIII.

Invenire duo Triangula rectangula, in quibus hypotenusæ ductæ invicem, faciant quadratum: basis verò in basem, & perpendiculū in perpendiculū, efficiant cubos.

ADverte duo triangula inventa in Problemate

10.	8.	6.
360.	216.	188.

blemate 54, quæ hîc attexuntur : illa enim satisfaciunt omnibus postulatis : imò & latera circa rectum decussatim ducta faciunt quadratos: nam 6 in 216, facit 1296: & 8 in 288, facit 2304.

PROBLEMA LIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum & diameter circuli inscripti sint cubi sigillatim; hypotenusa autem sit quadrato-quadratus.

Sint duo latera circa rectum 1N, & 8. Horum summa quolibet cubo, puta 1. multata, fit hypotenusa 1N + 7. Superest ut hujus hypotenusæ quadratum 1Q + 14N + 49 æquetur 1Q + 64, (summa est ex quadratis laterum circa rectum) & fit valor $\frac{15}{14}$. Igitur $\frac{15}{14}$. 8. $\frac{113}{14}$ est triangulum rectangulum, cujus unum latus circa rectum est cubus, sicuti & diameter circuli inscripti. Quare si singula hæc latera ducantur in cubum hypotenusæ, fiet triangulum quæsitum $\frac{163047361.\ 161604464.\ 26643455}{38416}$.

PRO

PROBLEMA LX.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus singula latera multata uno eodémque cubo, relinquant quadratos.

NOn est difficilis ista quæstio, possunt enim exhiberi triangula cujuscunque speciei, atque ideò infinita. Ponatur enim triangulum quæsitum 3N. 4N. 5N, atque inde tollatur cubus 1, restabunt 3N -- 1. 4N -- 1. 5N -- 1 æquandi quadratis. Horum productus solidus 60C -- 47Q + 12N -- 1 ducatur in 10N -- 1 (possunt plures alii quàm 10N -- 1 eligi, ut 8N -- 1. 9N -- 1. 11N -- 1. 12N -- 1 & cætera,) fiétque plano-planus 600QQ -- 530C + 167Q -- 22N + 1 æquandus quadrato. Finge latus 1 -- 11N + 23Q. & fit valor $\frac{24}{71}$. Ducatur 24 in quadratum 71, nempè 5041, & productus 120984 in 3, 4, 5, sigillatim, fiétque triangulum quæsitum 362952. 483936. 604920. Si enim ex singulis istis lateribus tollatur cubus 71, qui est 357911, relin

relinquentur quadrati 5041. 126025. 247009.

Rursùs ponatur triangulum quæſitum 12N. 5N. 13N. Ergo ſi tollatur inde cubus 1, reſtabunt 12N − 1. 5N − 1. 13N − 1 æquandi quadratis. Horum productus ſolidus 780C − 281Q + 30N − 1 ducatur in 30N − 1, fiétque plano-planus 23400QQ − 9210C + 1181Q − 60N + 1 æquandus quadrato. Finge latus 1 − 30N + $\frac{281}{2}$Q, & fit valor $\frac{3120}{14639}$. Ducatur 3120 in quadratum 214300321 (à latere 14639) & productus 6686170001520 in 12. 5. 13. & fiet triangulum quæſitum. Cubus numeri 14639 erit cubus tollendus.

APPENDIX.

Hinc ſolves Problema ſequens. *Invenire triangulum rectangulum, in quo ſingula latera, nec non eorum ſumma, uno & eodem cubo multata, relinquant quadratos.* Siquidem triangulum quod naſcitur ex poſteriore operatione, eſt 8023404018240. 33430850007600. 86920210019760. ſi ex primo latere tollas 3137142399119 (cubum à latere 14639) fit quadratum à latere 2210489. Si ex ſe-

cundo

cundo latere tollas eundem cubum, relinquitur quadratum à latere 453809. Si à tertio latere tollatur idem cubus, extabit quadratum lateris 2356879. Denique si à summâ laterum tollas eundem cubum, habebitur quadratum lateris 4113559.

Idem continget in triangulo per priorem operationem reperto, nam si quadratum denominatoris 711, quod est 450241, ducas in 240, & productum in 3. 4. 5. 12, fient producti, ex quibus si subtrahatur 302111711 (cubus est 711) relinquentur quadrati à lateribus 4697. 11407. 15433. 31537.

PROBLEMA LXI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo dupla perpendicularis addita & detracta hypotenusæ faciat quadratos: productus autem ex minore latere in summam reliquorum faciat cubum.

Hic supponendum est primò, quòd si hypotenusa cujuscunque trianguli dividat

vidat ſingula latera, fiet novum triangulum, in quo perpendicularis æquabitur duplæ areæ, quia hypotenuſa in novo triangulo erit unitas, quæ numeros, quos dividit aut multiplicat, relinquit eoſdem.

Supponendum eſt ſecundò, quadruplam aream additam & detractam quadrato hypotenuſæ facere quadratos; at dupla perpendicularis erit æqualis quadruplæ areæ, ergò dupla perpendicularis in novo triangulo, hypotenuſæ (quæ ſuo æquatur quadrato) addita & ſubtracta faciet quadratos.

Supponendum eſt tertiò, quòd ſi formetur triangulum rectangulum à duobus numeris ſolâ unitate diſtantibus, productus ex minore laterum in ſummam reliquorum erit cubus, quia ſumma illa erit quadratum minoris lateris.

Reſtat igitur ut formetur aliquod triangulum rectangulum, ex duobus numeris ſolâ unitate diſtantibus, in quo hypotenuſa ſit cubus. Ponantur numeri formantes 3N + 1 & 3N. Latera erunt 18Q + 6N + 1. 6N + 1. 18Q + 6N. Hujus trianguli hypotenuſa æquetur cubo, fingendo latus 1 + 2N, & fiet valor $\frac{3}{4}$. Er-

go numeri formantes erunt $\frac{13}{4}$ & $\frac{9}{4}$ (non sunt sumendi soli numeratores ante formationem trianguli:) latera erunt $\frac{250.\ 88.\ 234}{16}$. In minimis igitur triangulum erit $\frac{125.\ 44.\ 117}{8}$. Ergo hypotenusa est cubus. Cape jam solos numeratores, seu triangulum 125. 44. 117. & singula latera dividantur per 125, & habebitur triangulum quæsitum $\frac{125.\ 44.\ 117}{125}$.

PROBLEMA LXII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quodlibet segmentum hypotenusæ æquetur lateris sibi proximi quadrato, & differentia laterum sit quadratus.

SVpponendum est rursùs, quòd si hypotenusa cujusque trianguli dividat singula latera, hypotenusæ segmenta singula æquabuntur quadratis à latere vicino: quia quadratum unius lateris circa rectum, æquatur rectangulo sub hypotenusâ in segmentum illi lateri vicinum, sed hypotenusa est unitas, igitur quadratum lateris

æquatur

æquatur ſegmento ſibi vicino.

Reſtat ergò ut inveniatur triangulum rectangulum, in quo hypotenuſa ſit quadratus, ſicut & differentia laterum minorum. At ſuprà exhibuimus duo ejuſmodi triangula diverſæ ſpeciei, nempè 169. 119. 120: & 2325625. 2276953: 473304. Si itaquè alterutrius trianguli latera dividantur per hypotenuſam, habebitur duplex ſolutio Problematis propoſiti. Erit itaque triangulum quæſitum $\frac{169.\ 119.\ 120}{169}$, vel $\frac{2325625.\ 2276953.\ 473304}{2325625}$

PROBLEMA LXIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo area diſtet à ſingulis laterum differentiis per quadratum, & quodlibet ſegmentum hypotenuſæ factum per demiſſionem perpendicularis ab angulo recto, diſtet à ſuo quadrato per quadratum.

Ex dictis in præcedentibus ſequitur, quod ſi alicujus trianguli ſingula latera dividantur per hypotenuſam, quodlibet

ſegmentum diſtat à ſuo quadrato, per quadratum perpendicularis : etenim quadratum unius lateris circa rectum æquatur quadrato perpendicularis, & quadrato ſegmenti propinqui : ſed jam oſtendimus quadratum unius lateris æquari ſegmento ſibi propinquo : igitur ſegmentum quodlibet hypotenuſæ æquatur quadrato ſuo, & quadrato perpendicularis. Aliunde certum eſt, quòd ſi latera trianguli 5. 3. 4. dividantur per hypotenuſam, trianguli area diſtabit à ſingulis laterum differentiis per quadratum, ergo triangulum $\frac{5.3.4}{5}$ erit triangulum quæſitum.

PROBLEMA LXIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratum perpendicularis detractum cuilibet ſegmento hypotenuſæ, relinquat quadratos, & ſumma laterum circa rectum ſit quadratus.

Hoc Problema mihi propoſitum eſt anno 1670. April. 24. ab illuſtri Analyſtâ

lyſtâ *D. Ozanam*, Lugduni in Galliâ Mathematicarum Profeſſore, cui ego ita ſatisfeci. Reperiatur triangulum aliquod cujus hypotenuſa, & ſumma laterum ſit quadratus numerus: tale eſt illud 4687298610289. 4565486027761. 1061652293520. quod *D. De Fermat* clariſſimus Senator Parlamenti Tholoſani invenit: atque hujus trianguli ſingula latera dividantur per hypotenuſam, fiétque triangulum quæſitum

$$\frac{4687298610289.\ 4565486027761.\ 10616522935[20]}{4687298610289}.$$

APPENDIX.

Omitto plurima alia Problemata iſtiuſmodi, quæ fundantur in Theoremate ſequenti. *Si cujuſcunque Trianguli rectanguli ſingula latera dividantur per hypotenuſam, fiet novum triangulum rectangulum, in quo perpendicularis æquabitur dupla areæ: & ſegmentum quodlibet hypotenuſæ ſuo multatum quadrato, relinquit quadratum perpendicularis: & quadrata laterum circa rectum æquantur ſigillatim ſegmentis baſeos ſibi proximis: & dupla perpendicularis addita & detracta hypotenuſæ, facit quadratos: & quodlibet quadratum lateris circa rectum differt à qua-*

drato perpendicularis per quadrato - quadratum : & quodlibet ſegmentum hypotenuſæ quadratum eſt : & differentia cujuſlibet ſegmenti ab hypotenuſâ, atque ipſa hypotenuſa quadratus eſt. Horum omnium ſummatim in præcedentibus, datæ ſunt demonſtrationes.

PROBLEMA LXV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo minus latus ſit quadratum, & ſumma duorum minorum laterum, & ſumma duorum majorum laterum, & aggregatum ex minore latere cum ſuâ radice quadratâ, & aggregatum ex ſummâ duorum minorum cum ſuâ radice, & aggregatum ex ſummâ duorum majorum cum ſuâ radice.

OBvium eſt ſtatim triangulum 41. 9. 40. quod ſatisfacit tribus prioribus poſtulatis. Quare utor illo, & pono 9Q + 3N

$+ 3N$, & $49Q + 7N$, & $81Q + 9N$ æquanda quadratis : unde sequitur $9 + 3N$. $49 + 7N$. $81 + 9N$ quadratis æquari. Productus solidus illorum est $35721 + 20979N + 3591Q + 189C$, qui rursùs est æquandus quadrato. Finge latus $189 + \frac{111}{2} N + \frac{2043}{1512} Q$. & fit pro valore, fractio $\frac{1101240}{51529}$. solvítque triplicatam æquationem posteriorem $9 + 3N$. $49 + 7N$. $81 + 9N$. Ille autem valor dividens unitatem, dat alium valorem, $\frac{51529}{1101240}$, solvítque triplicatam æqualitatem priorem $9Q + 3N$. $49Q + 7N$. $81Q + 9N$. Igitur quoniam triangulum quæsitum intelligitur positum $41Q$. $9Q$. $40Q$. quadratum numeratoris 2655237841. ducendum erit in 41. 9. 40. & habebitur triangulum quæsitum $\frac{108864751481.\ 23897140569.\ 106209513640}{1212729537600}$.

PROBLEMA LXVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo minus latus sit quadratum, & summa duorum minorum laterum, & summa duorum majorum, & aggregatum ex minore latere cum radice summæ duorum majorum, & aggregatum ex summâ duorum minorum cum radice minoris lateris, & aggregatum ex summâ duorum majorum cum radice summæ duorum minorum.

POnantur, ut in præcedenti, latera trianguli quæsiti 41Q. 9Q. 40Q. ita enim satisfit tribus prioribus postulatis: restátque duntaxat ut 9Q + 9N. 49Q + 3N. 81Q + 7N æquentur quadratis. Ergo 9 + 9N. 49 + 3N. 81 + 7N quadratis sunt æqualia. Horum trium productus solidus 35721 + 40995 N + 5463 Q + 189 C æquabitur quadrato. Finge latus 189 + $\frac{4555}{42}$ N,

$-\frac{11111293}{666792}$ Q, & fiet pro valore, $\frac{1522998719686584}{123460832131849}$, solvítque triplicatam æquationem posteriorem 9 + 9N. 49 + 3 N. 81 + 7N: ac dividendo unitatem per hunc valorem, fit alius valor $\frac{123460832131849}{1522998719686584}$, solvítque triplicatam æquationem priorem 9Q + 9N. 49Q + 3 N. 81 Q + 7 N. Quoniam igitur triangulum quæsitum est positum 41 Q. 9 Q. 40 Q. capiendum erit quadratum 1524257707058859849412015880l, & ducendum in 41. 9. 40, & tribus productis 62494565989413253825892651084l. 137183193635297386447081429209. 609703082823543939764806352040. supponendus denominator communis 2319525100166973866493189589056. Ita habetur triangulum quæsitum.

APPENDIX.

Possent multis modis variari latera, non tantùm cum summis prædictis, sed etiam apponendo signum *plus*, vel signum *minus*, unde nascerentur diversa Problemata, methodo non absimili solvenda. Quod indicasse satis esto.

PROBLEMA LXVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo productus ex uno latere circa rectum in summam aliorum sit cubus: & diameter circuli triangulo inscripti, cubus: & summa numerorum, qui formant triangulum, æqualis sit uni lateri circa rectum.

FAcile est hoc Problema ex isto Theoremate. *Si duo numeri formantes triangulum differant per unitatem: unum latus circa rectum trianguli ductum in summam reliquorum laterum faciet cubum, & ipsum latus erit æqualis numeris formantibus.* Pone igitur numeros formantes 1N + 1 & 1N. Latera erunt 2Q + 2N + 1. 2N + 1. 2Q + 2N. Superest igitur ut diameter circuli inscripti sit cubus: at diameter illa æquatur 2N (Differentia est summæ laterum & hypotenusæ.) Oportet igitur 2N æquari cubo. Finge latus cubi 2N. Ergo 2N æquatur 8C. & fit valor $\frac{1}{2}$. ac proinde numeri formantes

formantes erunt $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$. & triangulum quæſitum $\frac{5}{2}$. 2. $\frac{3}{2}$.

PROBLEMA LXVIII.

Invenire in integris Triangulum rectangulum, in quo unum latus circa rectum ſit cubus: alterum quadratus: ſumma verò vel differentia duorum majorum laterum, cubus.

CApe aliquem cubum qui ſit numerus impar, & unitate major, puta 27: duæ ipſius medietates ſunt 14 & 13: forment illi duo numeri triangulum 365. 27. 364. Hæc tria latera duc in cubum majoris lateris circa rectum 364 (qui cubus eſt 48228544:) tres producti 17603418560. 1302170688. 17555190016. efficient in integris triangulum quæſitum. Idem fieri poteſt accipiendo cubos 125. 343. 729. 1331. & ſic in infinitum. Vnde quoniam numeri formantes ſimul ſumpti æquantur lateri illi, quod eſt cubus, effici poteſt Problema ſequens. *Invenire infinita Triangula*

gula rectangula, in quorum quolibet unum latus circa rectum cubus est, alterum quadratus, summa & differentia duorum majorum laterum, cubus.

PROBLEMA LXIX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo diameter circuli inscripti sit quadratus, & duplum unius lateris circa rectum additum & detractum quadrato hypotenusæ, faciat quadratos.

QVærendum ad hoc opus, triangulum, in quo unum latus ex duobus lateribus minoribus sit quadratum: & summa laterum circa rectum superet hypotenusam quadrato. Tale est triangulum 145. 17. 144. Hujus trianguli singula latera dividantur per 144, habebitúrque triangulum quæsitum $\frac{145.\ 17.\ 144}{144}$. Ratio est, quia per istam divisionem unum latus erit unitas, ergo aliud latus erit duplum areæ: ergo duplum istius lateris æquabitur quadruplo areæ: at quadruplum areæ additum

&

& detractum quadrato hypotenusæ, facit quadratos: igitur & duplum lateris id præstabit.

Simili arte procederes, si quærendum foret triangulum, in quo semidiameter circuli inscripti foret quadratus, duplum autem unius lateris circa rectum additum & detractum hypotenusæ quadrato, faceret quadratos: trianguli enim 5. 3. 4 singula latera divisa per 4, dabunt triangulum quæsitum $\frac{5.\ 3.\ 4}{4}$.

Non aliter, si capias triangulum inventum Probl. 68. nempè 365. 27. 364. & dividas singula latera per medium latus 27, fiet triangulum $\frac{365.\ 27.\ 364}{27}$. in quo unum latus circa rectum cubus erit, & summa duorum majorum laterum, atque eorum differentia cubus; & insuper duplum unius lateris circa rectum additum & detractum quadrato hypotenusæ, faciet quadratos.

PRO

PROBLEMA LXX.

Invenire tria Triangula rectangula, quæ non ſint Arithmeticè proportionalia, itaut hypotenuſa tertii multata duobus minoribus lateribus primi relinquat quadratum: & majus latus circa rectum ejuſdem tertii multatum hypotenuſâ ſecundi, quadratum quoque efficiat: & minus latus tertii additum hypotenuſæ & majori lateri circa rectum primi, faciat rursùs quadratum: ac denique ſumma omnium perimetrorum ſit numerus quadratus.

NOlui triangula eſſe Arithmeticè proportionalia, quia ſi hoc concedatur, nihil foret facilius, eſt enim primum triangulum 10. 8. 6. ſecundum 20. 16. 12. tertium 30. 24. 18. Sit igitur primum triangulum 10 + 5N. 8 + 4N. 6 + 3N. ſecundum 20 -- 5N. 16 -- 4N. 12 -- 3N. tertium

tium verò 30. 24. 18. Ità summa perimetrorum est quadratus 144. superéstque duntaxat ut 16 -- 7N. 4 + 5N. 36 + 9N. æquentur quadratis. Reducantur ad eundem unitatum quadratum, & fient 144 -- 63N. 144 + 36N. 144 + 180N. æquandi quadratis: sicut etiam 1 -- 63N. 1 + 36N. 1 + 180N. Horum trium productus solidus 1 + 153 N -- 7128 Q -- 408240 C æquetur quadrato, fingendo latus quadrati 1 + $\frac{153}{2}$ N -- $\frac{51921}{8}$ Q. & fiet pro valore, $\frac{37423944}{2695790241}$. Hunc valorem duc in 144 & habetur valor pro primis positionibus, nempè $\frac{5389047936}{2695790241}$. Hunc si resolvas juxta positiones, fiet primum triangulum quæsitum $\frac{53903142090.\ 43122513672.\ 32341885254}{2695790241}$. Secundum erit $\frac{26970565140.\ 21576452112.\ 16182339084}{2695790241}$. Tertium autem est 30. 24. 18. & satisfaciunt quæstioni.

CAPVT

CAPUT TERTIUM.

Complectens Problemata singularia de Triangulo Rectangulo, in quibus occurrunt numeri irrationales.

PROBLEMA I.

Invenire Triangulum rectangulum, cujus tria latera sint Geometricè proportionalia.

DA P E hypotenusam ad libitum 2. & pone latera circa rectum ℞ (2 + 1 N) & ℞ (2 -- 1 N) sic enim fit triangulum rectangulum, quia quadrata minorum laterum æquantur quadrato hypotenusæ. Supereſt ut tria illa latera sint proportionalia: quod ut fiat, debet productus extremorum ℞ (8 -- 4 N)

æquari

æquari quadrato medii 2 + 1N. Igitur eorum quadrata 8 -- 4N & 4 + 4N + 1Q debent esse æqualia. Hinc verò fit valor Radicis ℞ 20 -- 4, qui si resolvatur juxta positiones, extabit triangulum quæsitum. 2. ℞ (℞ 20 -- 2). ℞ (6 -- ℞ 20.)

Aliter. Ponatur pro hypotenusâ 2, & pro minore latere 1N. Igitur quadratum medii lateris erit 2N, & medium latus ℞ 2N, & tria illa latera sunt Geometricè proportionalia. Superest igitur, ut faciant triangulum rectangulum: quod ut fiat, debet quadratum hypotenusæ 4 æquari quadratis minorum laterum 1Q + 2N. & fit valor Radicis ℞ 5 -- 1. & triangulum quæsitum 2. ℞ (℞ 20 -- 2). ℞ 5 -- 1. Hoc autem præclarè consentit cum superiore, nam ℞ (6 -- ℞ 20) est idem cum ℞ 5 -- 1.

Aliter. Captâ rursùs hypotenusâ 2, ponatur medium latus 1N. Igitur ℞ (4 -- 1Q) erit tertium latus, ità enim fit triangulum rectangulum. Restat itaque ut tria latera sint proportionalia, & productus sub extremis ℞ (16 -- 4Q) æquetur quadrato medii 1Q. Ergo horum quadrata 16 -- 4Q & 1QQ sunt æqualia, & fit valor Radicis ℞ (℞ 20 -- 2) & triangulũ quæsitum 2. ℞ (℞ 20 -- 2). ℞ 5 -- 1.

PROBLEMA II.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo majus latus circa rectum sit medio loco proportionale inter hypotenusam & duplum minoris lateris.

CAptâ, ut libuerit, hypotenusâ 2, erunt latera circa rectum ℞ (2 + 1N) & ℞ (2 -- 1N) propter rationem superiùs explicatam, sic etenim habetur triangulum rectangulum. Quare superest ut medium latus ℞ (2 + 1N) sit medio loco proportionale inter 2 & ℞ (8 -- 4N). Hoc autem ut sit, debet productus istorum ℞ (32 -- 16N) æquari quadrato medii lateris 2 + 1N. Si verò hi duo termini sunt æquales, erunt & quadrata illorum 32 -- 16N & 4 + 4N + 1Q æqualia. Ex hâc autem æquatione nascitur valor ℞ 128 -- 10. juxta quem si resolvas positiones, erit triangulum quæsitum 2. ℞ (℞ 128 -- 8). ℞ (12 -- ℞ 128).

Examen facile est; primò enim quadrata laterum æquantur 4, sicut & quadratum hypotenu

hypotenusæ : deinde secundum latus est medio loco proportionale inter hypotenusam 2,& duplũ tertii lateris ℞(48 -- ℞ 2048) Siquidem productus sub istis ℞ (192 -- ℞ 32768) æquatur ℞ 128 -- 8, quadrato secundi lateris, quod probatur, nam quadratum istius posterioris est 192 -- ℞ 32768; sicut & quadratum prioris.

PROBLEMA III.

Invenire Triangulum rectangulum, in quò semissis majoris lateris circa rectum, sit medio loco proportionalis inter hypotenusam & minus latus.

CAptâ ad libitum hypotenusâ 4, ponantur latera circa rectum ℞ (8 + 4N) & ℞ (8 -- 4N) ut tria illa faciant triangulum rectangulum. Tum capiatur secundi lateris dimidium ℞ (2 + 1N) & ejus quadratum 2 + 1N æquetur producto ex hypotenusâ in tertium latus ℞ (128 -- 64 N.) Supposito igitur, quòd ista duo sint æqualia, eorum quadrata 4 + 4N + 1Q & 128 -- 64N

-- 64N æqualia erunt, & fit valor ℞ 1280 -- 34, juxta quem si resolvas positiones, erit triangulum quæsitum 4. ℞ (℞20480--128). ℞ (144 -- ℞ 20480).

Examen fiet, ut in præcedenti, in primis enim quadrata laterum minorum faciunt 16, sicut & quadratum hypotenusæ: deinde productus sub extremis est ℞ (2304 -- ℞ 5242880) cui æquatur quadratum à semisse lateris secundi: nam semissis est ℞ (℞ 1280 -- 32) & ejus quadratum ℞ 1280 -- 32): illorum siquidem quadrata seorsim sumpta faciunt 2304 -- ℞ 5242880.

PROBLEMA IV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo semissis hypotenusæ sit medio loco proportionalis inter latera circa rectum.

Captâ pro libito hypotenusâ 2, ponantur latera ℞ (2 + 1N) & ℞ (2 -- 1N:) sic enim erit infinitè triangulum rectangulum. Semissis hypotenusæ est 1, cujus quadratum

dratum 1 debet æquari producto ſub lateribus circa rectum. Eſt autem iſte productus ℞(4 -- 1Q. Quare erit æquatio inter illa: igitur & inter eorum quadrata 1 ac 4 -- 1Q. & fit valor ℞ 3, qui reſolutus juxta poſitiones, exhibet triangulum quæſitum 2. ℞(2 + ℞3). ℞(2 -- ℞3).

PROBLEMA V.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenuſa quadrato minoris lateris addita, habeat proportionem datam ad quadratum medii lateris. Sit data ratio 11 *ad* 9.

CAptâ, ut libet hypotenuſâ, 4, erunt latera circa rectum ℞ (8 + 1 N) & ℞ (8 -- 1 N),ita enim fit triangulum rectangulum. Eſt autem quadratum minoris lateris 8 -- 1 N, quod hypotenuſæ additum facit 12 -- 1 N. Igitur 12 -- 1 N ad 8 + 1 N (tale eſt quadratum lateris ſecundi) habet rationem 11 ad 9. & fit valor 1.qui reſolutus juxta poſitiones dat triangulum quæſitum 4.3.℞7.

PROBLEMA VI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo summa quadratorum à duobus majoribus lateribus ad quadratum minoris lateris habeat proportionem datam. Sit data proportio 5 ad 1.

ASsumptâ hypotenusâ ad libitum ℞ 12. ponantur latera ℞ (6 + 1N) & ℞ (6 -- 1N), ut habeatur triangulum rectangulum. Sumatur quadratus hypotenusæ 12, & jungatur quadrato majoris lateris 6 + 1N. & fit 18 + 1 N. Hæc igitur summa ad 6 -- 1 N est ut 5 ad 1. ac proinde productus sub extremis 18 + 1N æquatur producto sub mediis 30 -- 5N. & fit valor 2. atque triangulum quæsitum ℞ 12. ℞ 8. 2.

PRO

PROBLEMA VII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratorum ab extremis ſumma ad quadratum medii lateris, habeat rationem datam. Detur proportio 5, ad 3.

CApiatur pro libito hypotenuſa 2, & latera circa rectum ℞ (2 + 1 N) & ℞ (2 -- 1 N): ſic enim quadratum hypotenuſæ æquatur quadratis minorum laterum. Quare ſupereſt tantùm ut quadrata laterum extremorum 6 -- 1 N ad quadratum medii 2 + 1 N habeant proportionem 5 ad 3. Igitur productus ſub extremis 18 -- 3N æquatur producto ſub mediis 10 + 1 N. & fit valor Radicis 1. Ergo juxta poſitiones triangulum quæſitum eſt 2. ℞ 3. 1.

PROBLEMA VIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus cubi à medio latere ad quadrato-quadratum minoris lateris, habeat rationem datam. Sit data ratio 12 ad 1.

Capiatur autem ad libitum hypotenusa 2. & ponantur latera circa rectum, ut suprà, ℞ (2 + 1N) & ℞ (2 -- 1N, sic enim satisfit primo postulato: restátque ut satisfiat secundo. Cubus medii lateris est ℞ (8 + 12N + 6Q + 1C), cujus quadratum est 8 + 12N + 6Q + 1C, quadrato-quadratum verò minoris lateris 4 -- 4N + 1Q. Hæc itaque duo se habent ut 12 ad 1. ac proinde productus sub extremis 8 + 12N + 6Q + 1C æquatur producto sub mediis 48 -- 48N + 12Q. ac post debitam metathesim 1C -- 6Q + 60N æquatur 40.

Hæc verò æquatio sic reducetur ad simpliciorem. Triplum quadratum trientis numeri

meri quadratorum 12 tollatur à numero Radium 60, horum differentia 48 erit numerus Radicum in secundâ æquatione. Hinc numerum absolutum (qui aliter vocatur homogeneum comparationis) in eâdem secundâ æquatione sic reperies. Duc 48 mox repertum in trientem eundem 2, fit 96, cui adde 8 cubum ejusdem trientis, fit 104. Et quoniam summa hæc major est homogeneo 40, hunc tolles à 104, fitque 64 pro homogeneo novo, & 1C + 48N æqualis 64.

In hâc verò postremâ æquatione, ut invenias valorem Radicis, sic procedet operatio. Triens numeri Radicum est 16, cujus cubo 4096 addes quadratum 1024 (quadratum est semissis 64) & extabit 5120; hujus summæ radix quadrata aucta & multata 32 (semissis est homogenei) dabit duos cubos ℞ 5120 + 32 & ℞ 5120 -- 32 quorum radices cubicæ junctæ per signum -- dabit valorem Radicis pro secundâ æquatione, in quâ inventus est 1 C + 48 N æqualis 64, atque hic valor erit ℞ cub. (℞ 5120 + 32) -- ℞ cub. (℞ 5120 -- 32.) Hunc valorem si auferas de prædicto triente numeri quadratorum 2, restabit valor

pro æquatione primâ 2 + ℞ cub. (℞ 5120 -- 32) -- ℞ cub. (℞ 5120 + 32).

Hunc ultimum valorem si resolvas juxta positiones ℞ (2 + 1N) & ℞ (2 -- 1N.) fiet tandem triangulum quæsitum, cujus hypotenusa est 2, majus latus circa rectum ℞ [4 + ℞ cub. (℞ 5120 -- 32) -- ℞ cub. (℞ 5120 + 32)], minus verò latus circa rectum ℞ [℞ cub. (℞ 5120 + 32) -- ℞ cub. (℞ 5120 -- 32)]. Semel moneo ℞ simpliciter sumi pro radice quadratâ, & ℞ cub. pro radice cubicâ.

PROBLEMA IX.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo quadratus cubi à medio latere ad summam quadrato-quadratorum ab hypotenusâ, & minori latere genitorum, habeat rationem datam. Sit data ratio 3 ad 1.

Cape, ut suprà, 2 pro hypotenusâ, & pone pro lateribus circa rectum ℞ (2 + 1N) & ℞ (2 -- 1N): quadratus cubi à secundo

ſecundo latere eſt 8 + 12N + 6Q + 1C, ſumma autem quadrato-quadratorum ab hypotenuſâ & minori latere eſt 20 − 4N + 1Q. Igitur hæc duo ſe habent in ratione datâ 3 ad 1: ac proinde productus ſub extremis 8 + 12N + 6Q + 1C æquatur producto ſub mediis 60 − 12N + 3Q. & poſt debitam metatheſim fiet prima æquatio inter 1C + 3Q + 24N & 52.

Hanc æquationem ſic reduces ad ſimpliciores terminos. Triplum quadratum trientis numeri quadratorum 3 tolles ex 24 coefficiente ſub radicibus, & fiet numerus 21 pro coefficiente ſub radicibus in ſecundâ æquatione. Deinde hunc eundem 21 duces in 1 (triens eſt numeri quadratorum) & fit 21, cui adde cubum ejuſdem trientis, & fit 22, quem ſi addas homogeneo 52, extat 74 pro homogeneo comparationis in ſecundâ æquatione, quæ eſt inter 1C + 21N & 74.

In hâc porrò æquatione ſic reperies valorem Radicis. Triens numeri radicum eſt 7, cujus cubus 343 addendus eſt 1369 (quadrato dimidii homogenei) & fit 1712. Hujus radix quadrata aucta & multata dimidio homogeneo 37, dat duos cubos ℞

1712

1712 + 37 & ℞ 1712 -- 37, quorum radices cubicæ junctæ per signum defectivum, exhibent valorem pro secundâ æquatione ℞ cub. (℞ 1712 + 37) -- ℞ cub. (℞ 1712 -- 37). Huic valori si detrahas 1 (triens est numeri quadratorum) fit valor ℞ cub. (℞ 1712 + 37) -- ℞ cub. (℞ 1712 -- 37) -- 1. pro æquatione primâ.

Hic valor debet resolvi juxta positiones ℞ (2 + 1N) & ℞ (2 -- 1N) & habetur triangulum quæsitum, in quo hypotenusa est 2: majus autem latus circa rectum ℞ [1 + ℞ cub. (℞ 1712 + 37) -- ℞ cub. (℞ 1712 -- 37)], & minus latus ℞ [3 + ℞ cub. (℞ 1712 -- 37) -- ℞ cub. (℞ 1712 + 37)].

PROBLEMA X.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo summa quadrato-cuborum ab hypotenusâ & minori latere ad quadrato-quadratum medii, habeat rationem datam. Sit data ratio 240 *ad* 1.

SVmatur verò ad libitum 10 pro hypotenusâ. Ergo latera circa rectum erunt ℞ (50

(50 + 1N) & ℞ (50 − 1N). Quadratocubus hypotenusæ est 1000000. Quadratocubus minoris lateris est 125000 − 7500N + 150Q − 1C. & quadrato-quadratus medii lateris est 2500 + 100N + 1Q. Igitur summa duorum priorum 1125000 − 7500N + 150Q − 1C ad posterius 2500 + 100N + 1Q est ut 240 ad 1. ac proinde productus sub extremis 1125000 − 7500N + 150Q − 1C æquatur producto sub mediis 600000 + 24000N + 240Q. Ergo post debitam metathesim 1C + 90Q + 31500N æquabitur 525000. Hæc prima æquatio.

Illam æquationem reduces ad simpliciorem ut in præcedenti Problemate : nam triplum quadratum trientis numeri quadratorum 2700 tolles ex numero radicum 31500, & restabit coefficiens sub radicibus in secundâ æquatione 22800. Deinde 22800 duces in trientem numeri quadratorum 30, & fit 684000, cui adde cubum ejusdem trientis 27000, & homogeneum 525000, extabítque novum homogeneum 1236000, & secunda æquatio inter 1C + 22800N & 1236000.

Hujus æquationis valorem sic reperies.
Triens

Triens numeri radicum est 7600, cujus cubus 438976000000 addetur quadrato dimidii homogenei 381924000000, & fit 820900000000: istius radix quadrata aucta & multata dimidio homogeneo 618000, dabit duos cubos ℞ 820900000000 + 618000, & ℞ 820900000000 -- 618000, quorum radices cubicæ junctæ per signum defectivum exhibent valorem pro secundâ æquatione ℞ cub. (℞ 820900000000 + 618000) -- ℞ cub. (℞ 820900000000 -- 618000.) Hinc aufer trientem supradictū numeri quadratorum 30, fiétque valor pro primâ æquatione ℞ cub. (℞ 820900000000 + 618000) -- ℞ 820900000000 -- 618000) -- 30.

Istum valorem si resolvas iuxta positiones ℞ (50 + 1N) & ℞ (50 -- 1N) fiet tandem triangulum quæsitum, in quo 10 est hypotenusa: & ℞ [20 + ℞ cub. (℞ 820900000000 + 618000) -- ℞ cub. (℞ 820900000000 -- 618000)] majus latus circa rectum: & ℞ [80 + ℞ cub. (℞ 820900000000 -- 618000) -- ℞ cub. (℞ 820900000000 + 618000)] minus latus circa rectum.

PRO

PROBLEMA XI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo cubus medii lateris ad quadrata extremorum habeat rationem datam. Sit data ratio 3 *ad* 1.

Capiatur pro libito hypotenuſa 10, & ponatur majus latus circa rectum 1 N; erit ergo minus latus ℞ (100 -- 1Q.) ſic enim fit triangulum rectangulum. Ergo cubus medii lateris 1C ad quadrata extremorum 200 -- 1Q eſt ut 3 ad 1, & productus extremorum 1C æqualis eſt producto mediorum 600 -- 3 Q. ac poſt debitam metatheſim 1C + 3Q æquabitur 600.

Hæc prima æquatio ſic revocabitur ad ſecundam. Triplus quadratus trientis numeri quadratorum erit coefficiens ſub radicibus in ſecundâ æquatione, afficietúrque ſigno defectivo: homogeneum verò novum efficietur, tollendo duplum cubum trientis numeri quadratorum ex priori homogeneo

mogeneo, & sic fiet æquatio inter 1 C -- 3 N & 598.

In hâc secundâ æquatione sic reperietur valor. Cubus trientis numeri radicum 1 subtrahatur ex quadrato dimidii absoluti 89401. residui 89400 radix quadrata addita & detracta dimidio absoluto 299, dabit duos cubos, quorum radices cubicæ additæ invicem exhibent valorem pro secundâ æquatione ℞ cub. (299 -+ ℞ 89400) -+ ℞ cub. (299 -- ℞ 89400.) Hinc detrahe trientem prædictum 1, & fit valor pro primâ æquatione ℞ cub. (299 -+ ℞ 89400) -+ ℞ cub. 299 -- ℞ 89400) -- 1. Ergo trianguli quæsiti hypotenusa erit 10. majus latus ℞ cub. (299 -+ ℞ 89400) -+ ℞ cub. (299 -- ℞ 89400) -- 1. minus verò latus debet resolvi juxta positionem tertii lateris, quæ fuit ℞ (100 -- 1 Q.) Quare debet sumi quadratum majoris lateris mox dati, quod est ℞ cub. (178801 -+ ℞ 31969797600) -+ ℞ cub. (178801 -- ℞ 31969797600) -- ℞ cub. (2392 -+ ℞ 5721600) -- ℞ cub. (2392 -- ℞ 5721600) -+ 3. atque hoc quadratum debet tolli à 100. residuum est 97 -+ ℞ cub. (2392 -- ℞ 5721600) -+ ℞ cub. (2392 -+ ℞ 5721600) -- ℞ cub. (178801

-- ℞

-- ℞ 31969797600) -- ℞ cub. (178801 + ℞ 31969797600): atque hujus residui radix quadrata est minus latus, nempè ℞ [97 + ℞ cub. (2392 -- ℞ 5721600) + ℞ cub. (2392 + ℞ 5721600) -- ℞ cub. (178801 -- ℞ 31969797600) -- ℞ cub. (178801 + ℞ 31969797600)].

PROBLEMA XII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo cubus minoris lateris ad quadrata reliquorum laterum habeat rationem datam. Sit data ratio 3. ad 1.

CAptâ pro libito hypotenusâ 30, ponatur minus latus 1N. Ergo ut fiat infinitè triangulum rectangulum, majus latus circa rectum erit ℞ (900 -- 1Q). Igitur cubus minoris lateris 1C ad summam quadratorum à reliquis 1800 -- 1Q erit ut 3 ad 1. ac ideò productus extremiorum 1C æquabitur producto mediorum 5400 -- 3Q: & fit prima æquatio inter 1C + 3Q & 5400.

Hanc æquationem ſic reduces ad ſecundam. Tolle duplum cubum trientis numeri quadratorum 2 ab homogeneo 5400, & fit homogeneum ſecundæ æquationis 5398. ut in præcedenti: triplus autem quadratus trientis ejuſdem affectus radicibus, & ſigno defectivo, eſt coefficiens : & fit ſecunda æquatio inter 1C -- 3N & 5398.

Pro hâc verò æquatione valor ſic reperietur. Triens numeri radicum eſt 1, cujus cubus 1 tolletur à quadrato dimidii homogenei 7284601, & fit reſiduum 7284600, cujus radix quadrata addita & detracta dimidio homogenei 2699, exhibet duos cubos, quorum radices cubicæ ſimul additæ dant valorem Radicis pro ſecundâ æquatione ℞ cub. (2699 + ℞ 7284600) + ℞ cub. (2699 -- ℞ 7284600.) Hinc detrahe prædictum trientem numeri quadratorum 1, & fiet valor Radicis pro primâ æquatione, ſeu minus latus trianguli quæſiti ℞ cub. (2699 + ℞ 7284600) + ℞ cub. (2699 -- ℞ 7284600) -- 1. Medium latus invenietur per reſolutionem poſitionis ℞ (900 -- 1Q) & hypotenuſa eſt 30.

PRO

PROBLEMA XIII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo cubus hypotenusæ æquetur triplo quadrati minoris lateris, & septuplo quadrati majoris lateris circa rectum.

Ponatur hypotenusa 1 N, & majus latus 6. Ergo minus erit ℞ (1 Q -- 36.) sic enim quadrata minorum laterum æqualia sunt quadrato hypotenusæ. Iam triplum quadrati minoris est 3 Q -- 108, & septuplum quadrati majoris lateris est 252: igitur eorum summa 3 Q + 144 æquatur 1 C, & fit æquatio inter 1 C -- 3 Q & 144.

Quoniam igitur cubus, minùs quadratis, æquatur unitatibus, cubo trientis numeri quadratorum addes semissem unitatum seu numeri absoluti, & ex hujus summæ 73 quadrato 5329 auferes cubum quadrati ejusdem trientis 1: residui enim 5328 radix quadrata summæ prædictæ addita, & detracta, dat duos cubos 73 + ℞ 5328 & 73 -- ℞ 5328, quorum radices cubicæ invi-

cem additæ, & auctæ triente numeri quadratorum, dant valorem ℞ cub. (73 + ℞ 5328) + ℞ cub. (73 -- ℞ 5328) + 1, seu hypotenusam quæsiti trianguli. At majus latus est 6. Superest igitur ut inveniatur minus, quod fiet resolvendo valorem juxta positionem ℞ (1Q -- 36.) Cape igitur valoris inventi quadratum, quod est ℞ cub. (10657 + ℞ 113571648) + ℞ cub. (10657 -- ℞ 113571648) + ℞ cub. (584 + ℞ 340992) + ℞ cub. (584 -- ℞ 340992) + 3. Hinc tolle 36, uti exigit positio: & fit residuum, cujus radix quadrata erit minus latus quæsitum ℞ [℞ cub. (10657 + ℞ 113571648) + ℞ cub. (10657 -- ℞ 113571648) + ℞ cub.(584 + ℞ 340992) + ℞ cub. 584 -- ℞ 340992) -- 33]

PRO

PROBLEMA XIV.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo cubus medii lateris æquetur quadruplo hypotenusæ quadrato, & triplo quadrato minoris lateris.

POnatur medium latus 1N, & hypotenusa 10. Ergo minus latus erit ℞ (100 -- 1Q), sic enim fit necessariò triangulum rectangulum, restátque duntaxat ut cubus medii lateris 1C æquetur 700 -- 3Q (summa est ex triplo quadrato minoris lateris, & quadruplo hypotenusæ quadrato.) Hinc itaque fit prima æquatio inter 1C + 3Q & 700.

Quoniam igitur in hâc æquatione duplus cubus trientis numeri quadratorum 2 minor est homogeneo 700, hic multandus erit illo, ut habeatur homogeneum in secundâ æquatione 698, & triplum quadratum ejusdem trientis erit coefficiens sub radicibus signo defectivo afficiendus, extabítque secunda æquatio inter 1C -- 3N & 698.

 698.

698. Valor porrò sic reperietur in postremâ æquatione. Cubus trientis numeri radicum 1 tollatur ex quadrato dimidii homogenei 12 801: residui radix quadrata addita & detracta eidem dimidio homogeneo exhibet duos cubos 349 + ℞ 121800, & 349 -- ℞ 121800, quorum radices cubicæ mutuò additæ, efficient valorem pro secundâ æquatione. Huic valori si detrahas 1 (triens est numeri quadratorum) fiet ℞ cub. (349 + ℞ 121800) + ℞ cub. (349 -- ℞ 121800) -- 1. pro valore seu medio latere trianguli quæsiti. Hunc valorem si resolvas juxta ℞ (100 -- 1Q) quæ fuit positio tertii seu minoris lateris, habebis minus latus.

PROBLEMA XV.

Invenire infinita Triangula rectangula, quorum quodlibet bis formetur à duobus numeris diversis.

SVmatur primum omnium triangulorum 5. 3. 4. & ejus area 6 quadruplicetur, ut

ut fiat 24. erit illa, area trianguli 10. 6. 8. cujus quodlibet latus duplum est prioris trianguli. Si igitur prioris trianguli numeri formantes 2 & 1 ducantur in ℞ 2, fient ℞ 8 & ℞ 2 pro numeris formantibus idem triangulum 10. 6. 8. Sed istud triangulum formatur à duobus numeris 3 & 1. Ergo idem triangulum formatur à duobus numeris ℞ 8 & ℞ 2. & à duobus aliis 3 & 1.

Rursùs sumatur quodlibet aliud triangulum 13. 5. 12. Hujus area 30 quadruplicetur, ut fiat 120, erit hic numerus area trianguli 26. 10. 24. cujus quodlibet latus duplum est priorum laterum. Sunt verò numeri formantes prius triangulum 3 & 2. Igitur si illi ducantur in ℞ 2, fient ℞ 18 & ℞ 8 pro numeris formantibus triangulum 26. 10. 24. quod etiam formatur à 5 & 1, ut manifestum est.

Idem est de quâcunque aliâ multiplicatione per 8, vel per 32, per 128. &c. in infinitum: nam si sumatur triangulum 5. 3. 4. & ducatur in 8, fiet triangulum 40. 24. 32. cujus area 384, & numeri formantes 6 & 2. Prius autem triangulum formatur à 2 & 1. Igitur si 2 & 1 ducas in ℞ 8, fient ℞ 32 & ℞ 8 pro numeris formanti-

bus posterius triangulum. Eâdem ratione si triangulum 5. 3. 4. ducatur in 32, fiet triangulum 160. 96. 128. cujus area 6144 est productus areæ prioris trianguli per 1024. Igitur si ℞ 32 (quæ est radix quadrato-quadrata 1024) ducatur in 2 & 1 (numeri sunt formantes triangulum prius) fient ℞ 128 & ℞ 32 pro numeris formantibus triangulum 160. 96. 128. Vnde certissimum est Theorema sequens. *Potest triangulum rectangulum rationale formari à duobus numeris irrationalibus.*

PROBLEMA XVI.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenusa ad perpendicularem, sit in ratione numerorum, qui triangulum formant.

Ponantur numeri formantes 1 N & 1. Latera sunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. Dupla autem area est 2 C − 2 N, quæ divisa per hypotenusam 1 Q + 1, exhibet perpendicularem. Igitur quadratum hypotenusæ

nusæ 1QQ + 2Q + 1 ad duplam aream 2C -- 2N erit in ratione hypotenusæ ad perpendicularem, & in ratione numerorum formantium, seu 1N ad 1. ac proinde productus sub extremis 1QQ + 2Q + 1 æquatur producto sub mediis 2QQ -- 2Q. Igitur 1QQ æquatur 4Q + 1. & fit valor Radicis ℞ (℞ 5 + 2.) Ergo numeri formantes erunt ℞ (℞ 5 + 2) & 1. Atque ex his duobus formatur triangulum quæsitum ℞ 5 + 3. ℞ 5 + 1. ℞ (℞ 80 + 8.)

Examen facile est, nam in isto triangulo dupla area est ℞ (88 + ℞ 8000.) quadratum verò hypotenusæ 14 + ℞ 180. Est autem ut quadratum illud 14 + ℞ 180 ad duplam aream ℞ (88 + ℞ 8000) ita ℞ (℞ 5 + 2) ad 1, quia tàm quadratum producti ab extremis, quàm quadratum producti à mediis est 376 + ℞ 141120.

PROBLEMA XVII.

Invenire Triangulum rectangulum, in quo hypotenusa cum duobus suis segmentis sint Geometricè proportionales.

POnatur hypotenusa 2, majus segmentum 1N, minus verò 2 -- 1N. Ergo productus sub extremis 4 -- 2N æquabitur quadrato medii 1Q. & fit valor ℞ 5 -- 1 pro majori segmento, ac proinde minus segmentum erit 3 -- ℞ 5. Productus segmentorum ℞ 80 -- 8 æquabitur quadrato perpendicularis, quod additum minoris segmenti quadrato 14 -- ℞ 180 facit quadratum minoris lateris circa rectum 6 -- ℞ 20. & minus latus ℞ 5 -- 1. Idem verò quadratum perpendicularis ℞ 80 -- 8 additum quadrato majoris segmenti 6 -- ℞ 20, facit quadratum majoris lateris circa rectum ℞ 20 -- 2. Igitur majus latus circa rectum ℞ (℞ 20 -- 2) & tria latera trianguli quæsiti 2. ℞ (℞ 20 -- 2). ℞ 5 -- 1.

PRO

PROBLEMA XVIII.

Invenire in irrationalibus infinita Triangula rectangula, in quibus area sit unus idémque cubus rationalis.

SVprà dedimus methodum inveniendi in rationalibus cubos rationales, pro areâ triangulorum, multiplicando singula latera cujuslibet trianguli per suam aream: ut si ducas tria latera 5. 3. 4 per aream 6, fiet novum triangulum 30. 18. 24. cujus area erit 216 cubus areæ prioris trianguli. Sit jam inveniendum triangulum in irrationalibus, quod habeat eundem cubum 216 pro areâ. Ponantur numeri formantes 1N & 3. Latera erunt 1Q + 9. 1Q − 9, 6N: area autem 3C − 27N. Hæc æquetur 216. Ergo 1C − 9N æquabitur 72. In hâc autem æquatione sic invenies valorem: Triens numeri Radicum est 3, cujus cubus 27 sublatus ex quadrato 1296 (quadratum est dimidii homogenei 72) relinquit 1269. Hujus radix quadrata addita

dita & detracta dimidio homogeneo 36, exhibet duos cubos, quorum radices cubicæ invicem additæ dant valorem Radicis ℞ cub. (36 + ℞ 1269) + ℞ cub. (36 -- ℞ 1269.) Igitur numeri formantes triangulum erunt ℞ cub. (36 + ℞ 1269) + ℞ cub. (36 -- ℞ 1269) & 3. Ex quibus formatur triangulum rectangulum quæsitum, nempè.

℞ cub. (2565 + ℞ 6578496) + ℞ cub. (2565 -- ℞ 6578496) + 15. ℞ cub. (2565 + ℞ 6578496) + ℞ cub. (2565 -- ℞ 6578496) -- 3. ℞ cub. (7776 + ℞ 59206464) + ℞ cub. (7776 -- ℞ 59206464). Cùm igitur possint sumi utcunque numeri formantes, poterunt inveniri quotcunque triangula istiusmodi.

PROBLEMA XIX.

Invenire duo Triangula rectangula, in quorum quolibet hypotenusa sit eadem, & quadratum cujuslibet lateris circa rectum, cubus rationalis.

QUoniam postulantur duo triangula habentia eandem hypotenusam, necesse

ceſſe eſt quadrata minorum laterum ſimul ſumpta in uno quoque triangulo æqualia eſſe; igitur erunt Arithmeticè proportionalia, & ob id habebunt differentias æquales: Cape ergo duos quoslibet cubos 125 & 64, quorum latera 5 & 4. ponatúrque latus unum 1 N -- 4, & aliud $\frac{16}{25}$ N -- 5. Horum cubi differunt $\frac{11529}{15625}$ C -- $\frac{3660}{625}$ Q + 61. Hæc itaque differentia æquabitur 61 (ſeu differentiæ cuborum aſſumptorum:) unde fit 1 N æqualis $\frac{500}{63}$. & duo cubi $\frac{15252992}{250047}$ & $\frac{125}{250047}$. Igitur ſi capias ſolos numeratores 15252992 & 125, ac per denominatorem communem multiplices cubos initio acceptos 125 & 64, fient quatuor cubi 15252992. 125. 31255875. 16003008. quorum duo extremi æquabuntur duobus mediis, & quælibet ſumma ſeu extremorum, ſeu mediorum eſt 31256000. ac proinde duo triangula quæſita ſunt

Primum ℞ 31256000. ℞ 125. ℞ 31255875.

Secundum ℞ 31256000. ℞ 15252992. ℞ 16003008.

At docuimus alibi (*in Doctrinæ Analyticæ Invento novo*) quomodò duobus cubis inveniantur

veniantur duo alii cubi æquales ; Igitur inveniri poſſunt quatuor triangula rectangula , quorum hypotenuſa ſit eadem , & quadrata laterum circa rectum, cubi rationales.

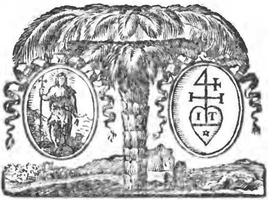
FINIS PARTIS PRIORIS.

DIOPHANTI REDIVIVI,

PARS POSTERIOR.

IN QVA, NON CASV, VT putatum est, sed certissimâ methodo, & analysi subtiliore, innumera enodantur Problemata, quæ aliud quàm Triangulum Rectangulum spectant.

Authore P. IACOBO DE BILLY, *Compendiensi Societatis* IESV.



LVGDVNI,
Apud IOANNEM THIOLY, vico Mercatorio, sub signo Palmæ.

M. DC. LXX.
Cum Approbatione & Permissu Superiorum.

DIOPHANTI REDIVIVI,

PARS POSTERIOR.

In quâ, non casu, ut putatum est, sed certissimâ methodo, & analysi subtiliore, innumera enodantur Problemata, quæ aliud quàm Triangulum Rectangulum spectant.

IN priori Parte attigimus duntaxat Problemata, quæ Triangulum Rectangulum spectant: in hâc verò Parte posteriori attingemus plurima alia, non de trivio, sed selecta tantùm, & quæ quantùm valeat

humanæ mentis acies, apertiſſimè demonſtrabunt.

CAPVT PRIMVM.

Complectens Problemata ſingularia, quæ ſimplicem numerum ſpectant.

PROBLEMA I.

Invenire numerum, cujus quadrato-quadratus ipſo quæſito, & ejus cubo multatus, relinquat quadratum.

PONATVR 1N pro numero inveniendo. Igitur 1QQ -- 1C -- 1N æquabitur quadrato. Finge latus iſtius quadrati 1Q -- $\frac{1}{2}$N, & fiet valor -- 4, qui reverà ſatisfacit, nam ipſius 1QQ -- 1C -- 1N facit 324, quadratum à latere 18: ſed quoniam hinc amandare lubet

lubet numeros fictos, ponatur $1N - 4$ pro novâ Radice, & juxta illam resolvatur numerus superior quadrato æquatus: extabítque novus terminus $1QQ - 17C + 108Q - 305N + 324$ æquandus quadrato. Finge latus $1Q - \frac{17}{2}N - 18$, fiétque pro valore $\frac{2444}{287}$. Hinc tolle 4, ob novam Radicem $1N - 4$, & fiet pro numero quæsito, $\frac{1296}{287}$.

PROBLEMA II.

Invenire numerum, qui detractus summæ sui cubi, & sui quadrato-quadrati, faciat quadratum.

Esto numerus ille $1N$. Ergo $1QQ + 1C - 1N$ æquabitur quadrato. Finge latus illius quadrati $1Q + \frac{1}{2}N$. & fit valor -4. Quare iteranda est operatio, & ponenda nova Radix $1N - 4$, & juxta eam resolvendus terminus mox æquatus quadrato, fiétque novus terminus $1QQ - 15C + 84Q - 209N + 196$ quadrato æquandus. Finge latus $1Q - \frac{15}{2}N - 14$, & fit pro valore, $\frac{1676}{223}$. Hinc tolle 4, ob

novam Radicem 1N -- 4, & habetur pro numero quæſito, $\frac{784}{225}$.

PROBLEMA III.

Invenire numerum, qui auctus ſuo cubo, & ſuo quadrato - quadrato, faciat quadratum: multatus verò ſuo cubo, ſi reſiduum illud augeatur ſuo quadrato - quadrato, rurſùs quadratum efficiat.

SIt ille numerus 1N. Igitur 1QQ + 1C + 1N, & 1QQ -- 1C + 1N æquantur quadratis. Hæc duplicata æqualitas reſolvetur more ſolito: duorum illorum terminorum quadrato æquandorum differentia eſt 2C, quam producunt 2Q & 1N. Igitur horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratum majori æquatum termino, dat pro valore ſeu numero quæſito, 4, & ſatisfacit quæſtioni, nam ejus quadrato - quadratus cum ipſius cubo facit 320, cui ſi addas ipſum 4, fit 324, quadratus à latere 18: rurſùm ejus quadrato - quadratus cubo ipſius

ſius multatus facit 192, qui cum 4, procreat 196, quadratum à latere 14.

PROBLEMA IV.

Invenire numerum, quo ducto in tres Geometricè proportionales, & productis quadrato numeri inveniendi additis, fiant quadrati.

POnatur numerus quæſitus 1N, & ſint tres proportionales, in quos duci debet, 1. 2. 4. Igitur 1Q + 1N. 1Q + 2N. 1Q + 4N æquantur quadratis. Ergo & 1 + 1N. 1 + 2N. 1 + 4N quadratis quoque æquabuntur: ac proinde horum productus ſolidus 1 + 7N + 14Q + 8C debet æquari quadrato. Finge latus quadrati 1 − $\frac{7}{2}$N + $\frac{7}{8}$Q, & fiet pro valore, $\frac{120}{49}$. Per hanc fractionem dividatur 1, extabítque numerus ab initio quæſitus $\frac{49}{120}$.

PROBLEMA V.

Invenire numerum, quo ducto in tres Harmonicè proportionales, & productis quadrato numeri inveniendi additis, fiant quadrati.

ESto numerus ille 1N, & tres Harmonicè proportionales 2. 3. 6. Ergò 1Q + 2N. 1Q + 3N. 1Q + 6N æquari debent quadratis: veluti etiam 1 + 2N. 1 + 3N. 1 + 6N. Istorum trium posteriorum productus solidus 1 + 11N + 36Q + 36C erit quadrato æquandus. Finge latus 1 + $\frac{11}{2}$N + $\frac{23}{8}$Q. & fit pro valore $\frac{280}{529}$. Per hunc valorem divide 1, & numerus quæsitus erit $\frac{529}{280}$.

PROBLEMA VI.

Invenire numerum, quo ducto in tres Arithmeticè proportionales, ac productis quadrato numeri inveniendi additis, fiant quadrati.

POnatur numerus ille 1N, & tres proportionales 1. 3. 5. Igitur 1Q + 1N. 1Q + 3N. 1Q + 5N. debent quadratis æquari, nec non 1 + 1N. 1 + 3N. 1 + 5N. Horum posteriorum productus solidus 1 + 9N + 23Q + 15C æquetur quadrato, fingendo latus istius quadrati 1 + $\frac{9}{2}$N + $\frac{11}{8}$Q, fiétque pro valore $\frac{168}{121}$. Per hunc valorem divide 1, & habebis numerum quæsitum $\frac{121}{168}$.

APPENDIX.

Duo in tribus Problematibus præcedentibus advertenda sunt: Primum est, ex iis solvi Problemata sequentia, & quidem in integris. *Invenire numerum, cui si addantur*

 tres

tres aut Geometricè, aut Harmonicè, aut Arithmeticè proportionales, fiant quadrati; nam de proportione Geometricâ, numerus quæsitus est 2401, & tres proportionales 5880. 11760. 23520. De proportione Harmonicâ, numerus quæsitus est 279841, & tres proportionales 296240. 444360. 898720. De proportione autem Arithmeticâ, numerus quæsitus est 14641, & tres proportionales 20328. 60984. 101640.

Alterum, quod adverti debet diligenter, est, quòd licèt plerunque sit liberum eligere quoscunque tres proportionales; tamen id non semper licet: ut in Problemate postremo, ubi agitur de proportione Arithmeticâ, si ponas 1 N pro numero inveniendo, non possunt eligi tres proportionales 1. 2. 3. neque enim tres numeri 1Q + 1N. 1Q + 2N. 1Q + 3N. aut tres isti 1 + 1N 1 + 2N. 1 + 3N ullâ arte possunt æquari quadratis, quia inde sequeretur reperiri quatuor quadratos Arithmeticè proportionales, hoc autem esse prorsùs impossibile demonstravit *D. De Fermat* Senator Tholosanus, idémque subtilissimus Analysta.

PRO

PROBLEMA VII.

Invenire numerum, quo ducto in tres Geometricè proportionales, ac productis ex quadrato numeri quæsiti sigillatim subtractis, fiant quadrati.

ESto numerus quæsitus 1 N, & tres proportionales 9. 6. 4. Igitur 1 Q -- 9 N. 1 Q -- 6 N. 1 Q -- 4 N æquantur quadratis, sicuti etiam 1 -- 9N. 1 -- 6 N. 1 -- 4N. In hâc posteriori triplicatâ æqualitate productus solidus 1 -- 19N + 114Q -- 216 C æquari debet quadrato. Finge latus 1 -- $\frac{19}{2}$N + $\frac{95}{8}$Q, & fiet pro valore $\frac{616}{9025}$. Per hunc valorem divide 1, & habebis numerum quæsitum $\frac{9025}{616}$.

PROBLEMA VIII.

Invenire numerum, quo ducto in tres Harmonicè proportionales, ac productis quadrato numeri quæsiti detractis, fiant quadrati.

POnatur iste numerus 1 N, & sumantur tres proportionales 15. 12. 10. Igitur 1 Q -- 15 N. 1 Q -- 12 N. 1 Q -- 10 N æquabuntur quadratis, nec non etiam 1 -- 15 N. 1 -- 12 N. 1 -- 10 N. Horum itaque productus solidus 1 -- 37 N + 450 Q -- 1800 C æquandus est quadrato. Finge latus 1 -- $\frac{37}{2}$ N + $\frac{431}{8}$ Q, & fiet pro valore, $\frac{12376}{185761}$. Quarè si per hunc dividas 1, habebis numerum quæsitum $\frac{185761}{12376}$.

PRO

PROBLEMA IX.

Invenire numerum, quo ducto in tres Arithmeticè proportionales, ac productis quadrato numeri quæsiti detractis, fiant quadrati.

ESto numerus quæsitus 1 N, & eligantur tres proportionales 3. 4. 5. (ne incidatur in numeros fictos.) Ergo 1 Q -- 3 N. 1 Q -- 4 N. 1 Q -- 5 N. æquantur quadratis, ficuti etiam 1 -- 3N. 1 -- 4N. 1 -- 5N. Iſtorum productus ſolidus 1 -- 12 N + 47 Q -- 60 C quadrato æquetur, & fingatur iſtius quadrati latus 1 -- 6 N + $\frac{11}{2}$ Q, fiétque valor $\frac{24}{121}$. Igitur ſi per hunc valorem dividas 1, extabit numerus quæſitus $\frac{121}{24}$.

PRO

PROBLEMA X.

Invenire numerum, quo subtracto sigillatim à tribus Geometricè proportionalibus, fiant quadrati.

SIt ille numerus 2N -- 1, & tres Geometricè proportionales 1 N. 2 N. 4 N. Hinc igitur si tollas 2N -- 1, fiunt 1 -- 1 N. 1. 1 -+ 2N. inter quos medius est quadratus. Quarè superest ut duo alii 1 -- 1 N & 1 -+ 2N æquentur quadratis. Ponatur 1 N æquivalere 2N -+ 2Q: & juxta hoc resolvantur duo termini 1 -- 1N & 1 -+ 2N. fiéntque duo termini 1 -- 2 N -- 2 Q & 1 -+ 4N -+ 4Q æquandi quadratis. Horum posterior quadratus est à latere 1 -+ 2N. Ergo restat ut 1 -- 2N -- 2Q quadrato æquetur. Finge latus 1 -- 2N, ejúsque quadratum 1 -- 4N -+ 4Q æqua 1 -- 2N -+ 2Q: & fit valor $\frac{1}{3}$. Et quia 1 N æquivalet 2 N -+ 2 Q ex suppositione, capiendum est duplum valoris reperti, & addendum duplo ejus quadrati, & fiet valor Radicis $\frac{8}{9}$.

Numerus

Numerus ergò quæsitus, qui positus est $2N - 1$, erit $\frac{7}{9}$. & tres proportionales Geometricè $\frac{8}{9}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{32}{9}$.

PROBLEMA XI.

Invenire numerum, quo subtracto sigillatim à tribus Harmonicè proportionalibus, fiant quadrati.

Ponatur numerus $2N - 1$, & tres proportionales $6N$. $3N$. $2N$. Ex his itaque si tollatur $2N - 1$, habentur tria residua $1 + 4N$. $1 + 1N$. 1. Istorum residuorum postremum est quadratum: quare superest ut alia duo $1 + 4N$ & $1 + 1N$ quadratis æquentur. Finge $1N$ æquivalere $1N + 1Q$, ut primum illorum juxta hoc resolutum, sit infinitè quadratum. Restat igitur ut si resolvatur $1 + 1N$ juxta eandem æquivalentiam, fiat quadratus $1 + 1N + 1Q$, hoc autem præstabitur, si æquetur quadrato à latere $1 - 2N$, nam ejus quadratum $1 - 4N + 4Q$ æquatum $1 + 1N + 1Q$ dat valorem $\frac{5}{3}$. Cùm ergò $1N$ supponatur

supponatur æquivalere 1N + 1Q, addendus est valor cum suo quadrato, & habebitur valor ultimatus $\frac{40}{9}$. Ergo numerus quæsitus, qui positus est 2N − 1, erit $\frac{71}{9}$. & tres proportionales Harmonicè $\frac{80}{9}$. $\frac{120}{9}$. $\frac{240}{9}$.

PROBLEMA XII.

Invenire numerum, quo subtracto sigillatim à tribus Arithmeticè proportionalibus, fiant quadrati.

ESto numerus quæsitus 2N − 1, & tres proportionales 2N. 5N. 8N. Indè igitur sublato 2N − 1, erunt residua 1. 1 + 3N. 1 + 6N. æquanda quadratis. Cùm autem primum sit quadratum, restabunt 1 + 3N & 1 + 6N quadratis æquanda. Supponatur 1N æquivalere 2N + 6Q, ut terminus posterior 1 + 6N juxta hoc resolutus sit quadratus infinitè, à latere 1 + 6N. Restat itaque ut prior terminus 1 + 3N resolvatur juxta illud idem, unde fit 1 + 6N + 18Q æquandus quadrato. Finge latus 1 − 5N, & fit valor $\frac{16}{7}$. Cùm ergò

ergò 1N æquivaleat 2N + 6Q, ſumendum eſt duplum valoris, & ſextuplo quadrati ejus addendum, ut fiat valor ultimatus $\frac{1760}{49}$: ac proinde cùm numerus quæſitus ſit poſitus 2N — 1, erit ille $\frac{3471}{49}$. & tres Arithmeticè proportionales $\frac{3520}{49}$. $\frac{8800}{49}$. $\frac{14080}{49}$.

PROBLEMA XIII.

Invenire numerum, quo ſublato à quatuor continuè proportionalibus Geometricè, fiant quadrati.

POnatur numerus quæſitus 1N — 1, & quatuor Geometricè proportionales 1N. 2N. 4N. 8N. ità enim ſi numerus quæſitus tollatur à primo ex his quatuor, fit quadratus 1. Quare reſtat ut ſi idem tollatur à tribus reliquis, reſidua 1 + 1N. 1 + 3N. 1 + 7N æquentur quadratis: æquabuntur autem, ſi horum productus ſolidus 1 + 11N + 31Q + 21C quadrato æquetur. Finge latus 1 + $\frac{11}{2}$N + $\frac{3}{8}$Q, & fit valor $\frac{1080}{9}$. Ergo numerus quæſitus, qui fuit poſitus 1N — 1, erit $\frac{1071}{9}$: & quatuor proportionales $\frac{1080}{9}$. $\frac{2160}{9}$. $\frac{4320}{9}$. $\frac{8640}{9}$.

PROBLEMA XIV.

Invenire numerum, quo ſublato à quatuor continuè proportionalibus Harmonicè, fiant quadrati.

ESto numerus quæſitus $3N - 1$, & quatuor proportionales Harmonicè $3N.\ 4N.\ 6N.\ 12N.$ ità enim ſi numerus quæſitus tollatur à primo ex his quatuor, fit quadratus 1. Supereſt igitur, ut ſi idem auferatur à tribus reliquis, tria reſidua $1 + 1N.\ 1 + 3N.\ 1 + 9N.$ æquentur quadratis: æquabuntur verò, ſi illorum productus ſolidus $1 + 13N + 39Q + 27C$ quadrato æquetur. Finge latus $1 + \frac{13}{2}N - \frac{13}{8}Q$, & fit valor $\frac{3080}{169}$. Cùm igitur numerus quæſitus ſit $3N - 1$, erit $\frac{9071}{169}$: & quatuor proportionales $\frac{9240.\ 12320.\ 18480.\ 36960}{169}$.

APPENDIX.

Impoſſibile eſt, invenire numerum, qui detractus quatuor continuè proportionalibus

bus Arithmeticè, faciat quadratos, ob rationem allatam in appendice Problematis 6. quia nimirùm non possunt reperiri quatuor quadrati Arithmeticè proportionales continuè.

PROBLEMA XV.

Invenire numerum, quo addito quatuor continuè proportionalibus Geometricè, fiant quadrati.

Esto numerus quæsitus $1 -- 1N$, & quatuor proportionales $1N. 4N. 16N. 64N.$ ut si numerus quæsitus addatur primo, fiat quadratus 1. Superest itaque ut ille idem additus tribus reliquis, faciat summas quadratas: facit autem $1 + 3N.$ $1 + 15N.$ $1 + 63N.$ Igitur illa tria sunt quadrato æquanda, ac proinde illorum productus solidus $1 + 81N + 1179Q + 2835C$ æquari debet quadrato. Finge latus $1 + \frac{81}{2}N -- \frac{1845}{8}Q$, & fit pro valore, $\frac{1377000}{3404025}$. Ergo numerus quæsitus, qui fuit positus $1 -- 1N$, erit $\frac{2027025}{3404025}$. & quatuor proportionales erunt $\frac{1577000.\ 5508000.\ 22032000.\ 88128000}{3404025}$.

PRO

PROBLEMA XVI.

Invenire numerum, quo addito tribus quadratis Harmonicè proportionalibus, fiant quadrati.

QVærantur primùm tria quadrata Harmonicè proportionalia hoc modo. Sint illa 1. 1Q. 4Q. Certum eſt tria illa eſſe quadrata; reſtat ut ſint Harmonicè proportionalia: ut verò hoc ſit, oportet majorem 4Q ad minorem 1 eſſe, ut differentia duorum majorum 3Q ad differentiam duorum minorum 1Q -- 1. Ergò productus extremorum 4QQ -- 4Q æquatur producto mediorum 3Q: & ità 7Q æquatur 4QQ. Hinc verò fit numerus irrationalis, quia 7 non eſt numerus quadratus. Quare ut inveniantur tres quadrati Harmonicè proportionales in rationalibus, neceſſe eſt inveniri duos quadratos ejuſmodi, ut differentia illorum addita majori, faciat quadratum. Sint illi duo quadrati 1Q & 1Q + 2N + 1. Igitur differentia illorum

2N

2 N + 1 addita majori quadrato facit 1 Q + 4 N + 2 æquandum quadrato. Finge latus 1 N − 2, & fit valor $\frac{1}{4}$: & duo quadrati quæſiti in integris 1 & 25, nam eorum differentia 24 addita 25, facit quadratum 49. Quarè, ſi ponas tria quadrata Harmonicè proportionalia 25 Q. 1 Q. 1. & fiat ut 25 Q ad 1, ità differentia primi & ſecundi 24 Q ad differentiam ſecundi & tertii 1 Q − 1: erit productus ſub extremis 25 QQ − 25 Q æqualis producto ſub mediis 24 Q, extabítque valor $\frac{7}{5}$, & juxta poſitiones, tria quadrata Harmonicè proportionalia erunt in integris 1225. 49. 25.

Iam igitur ad primariam quæſtionem, pono numerum quæſitum eſſe 1 N, & tres quadratos Harmonicè proportionales 1225. 49. 25. Ergo 1225 + 1 N. 49 + 1 N. 25 + 1 N. æquabuntur quadratis, ac proinde illorum productus ſolidus 1500625 + 91875 N + 1299 Q + 1 C æquabitur quadrato. Finge latus 1225 + $\frac{75}{2}$ N − $\frac{429}{9800}$ Q, & fit pro valore, $\frac{411355000}{184041}$, & tres quadrati 1225. 49. 25.

PROBLEMA XVII.

Invenire numerum, qui additus quatuor continuè proportionalibus Harmonicè, faciat quadratos.

SIt ille 1 -- 1225N, & quatuor proportionales 1225N.1825N.3577N.89425N (inventi ſunt illi capiendo tres 1225. 49. 25. in Problemate præcedenti repertos, & inveniendo quartum proportionalem, ac reducendo omnia in integros,) ita enim addito numero quæſito cum primo fit quadratus 1, neque incidetur in numeros fictos. Reſtat igitur, ut ſi ille idem addatur tribus reliquis, fiant tres ſummæ 1 + 600N. 1 + 2352N. 1 + 88200N quadratæ: fient autem quadratæ, ſi illorum productus ſolidus 1 + 91152N + 261777600Q + 124467840000C æquetur quadrato. Finge latus iſtius quadrati 1 + 45576N + 907697088Q, fiétque pro valore, $\frac{8286287280 5376}{82391400356 3679744}$. Cùm itaque numerus quæquæſitus fuerit poſitus 1 -- 1225N, erit ille

ille $\frac{72240698437709 4144}{82391400356367 9744}$. & quatuor Harmonicè proportionales 101507019186585600. 151122474286981 1200. 29640049602482995 2. 741001240062074880 0. modò ſinguli dividantur per 82391400356367 9744. cujus quidem, (ut & reliquorum omnium) factum eſt diſtrictum examen.

PROBLEMA XVIII.

Invenire numerum, quo addito tribus quadratis Geometricè proportionalibus, fiant quadrati.

ESto numerus ille 1N, & tres quadrati 1. 4. 16. Ergo 1 + 1N. 4 + 1N. 16 + 1N. æquantur quadratis. Igitur illorum productus ſolidus 64 + 84N + 21Q + 1C quadrato æquandus eſt. Finge latus 8 + $\frac{21}{4}$N − $\frac{105}{256}$Q, & fit numerus quæſitus $\frac{347776}{11025}$.

PROBLEMA XIX.

Invenire numerum, quo detracto tribus quadratis Geometricè proportionalibus, relinquantur quadrati.

POnatur numerus quæsitus 1N, & tres quadrati 625.400.256. Igitur 625 -- 1N. 400 -- 1N. 256 -- 1N æquantur quadratis. Ergò productus illorum solidus 64000000 -- 512400N + 1281Q -- 1C æquatur quadrato. Finge latus 8000 -- $\frac{1281}{40}$N + $\frac{402639}{25600000}$Q, & fiet valor $\frac{14677195520000}{166985832321}$. ac proinde in integris, numerus quæsitus erit 14677195520000, & tres quadrati fient, multiplicando denominatorem fractionis prædictæ per tres quadratos assumptos 625. 400. 256. producti enim 104366145200625. 66794332928400. 42748373074176. erunt quadrati quæsiti.

PRO

PROBLEMA XX.

Invenire numerum, quo ducto in duos alios, ac in eorum ſummam, & productis quadrato numeri quæſiti additis, fiant quadrati.

ADverte primò, difficultatem hujus Problematis conſiſtere in eo, quòd jubeatur addi productos, quorum duo æquantur alteri, æqualitas enim quæ in eo caſu præcipitur fieri cum quadrato, nullatenùs effici poteſt per productum ſolidum, nec per aliam triplicatam æqualitatem.

Adverte ſecundò, quod jàm non ſemel inſinuavi, nimirùm, ſi ſit aliquis numerus, quo in tres alios ducto, ac productis additis quadrato illius numeri, fiant quadrati, illi producti additi cum unitate, efficient quadratos.

Adverte tertiò inde ſequi, quòd ſi multentur quadrati omnes unitate, & inter reſidua, ſint duo quædam æqualia alicui tertio, inventum eſſe quod quæritur.

Adverte quartò, licèt inquiri poſſint ejuſmodi producti per multiplices numeri cujuſcunque, putà 2, 3, 4, & cæterorum, tamen id fieri poſſe faciliùs & compendioſius per multiplices quinarii.

Capio igitur multiplices quinarii, qui adjectâ unitate faciunt quadratum, quales ſunt 15. 35. 80. 120. 195. 255. 360. 440. 575. 675. & reliquos, diſpicióque nùm duo ex prioribus æquentur alicui poſteriori, & invenio 80 & 360, æquari 440, quibus diviſis per 5, & inventis quotientibus 16. 72. 88. infero numerum 5 talem eſſe, ut ſi ducatur in 16. 72. ac in eorum ſummam 88, fieri productos 80. 360. 440. qui adjectâ unitate procreant quadratos 81. 361. 441. Vnde tandem concludo, ſi 5 dividat 1, quotientem inde natum, fore numerum quæſitum $\frac{1}{5}$.

Idem fiet in multis aliis, nam quia 3 ducto in 5. 16. 21. fiunt producti, qui additâ unitate generant quadratos, & 5 ac 16 æquantur 21: ſi 1 dividatur per 3, quotiens erit rursùm numerus quæſitus, quo ducto in 5 & 16, ac in eorum ſummam, fient numeri, qui additi quadrato quotientis, exhibebunt quadratos. Idem quoque continget

get in multiplicibus binarii, quoniam enim 2 ducto in 84. 180. 264. fiunt producti, qui additâ unitate, efficiunt quadratos, sequitur $\frac{1}{2}$ esse numerum, quo ducto in 84 & 180, ac eorum summam, extant producti, qui addito quotientis ejusdem quadrato, exhibent quadratos.

PROBLEMA XXI.

Invenire numerum, quo ducto in duos alios, ac in eorum summam, & productis qundrato multatis, fiant quadrati.

Ex iis, quæ explicata sunt in præcedenti Problemate, assumo multiplices quinarii, qui unitate multati, faciunt quadratos: nempè 5. 50. 65. 145. 170. 290. 325. 485. 530. 785. 1025. 1090. 1370 & cæteros in infinitum, dispicióque num duo priores æquentur alicui posteriori, invenióque 65, & 1025, æquari 1090. Hos sigillatim divido per 5, & fiunt quotientes 13. 205. 218. Vnde infero 5 esse numerum,

rum, quo ducto in 13. 205. 218. fiunt producti, qui si multentur unitate, exhibent quadratos 64. 1024. 1089. Ergo si 5 dividat 1, fiet quotiens, $\frac{1}{5}$, quo ducto in 13 & 205, ac eorum summam 218, habebuntur producti, qui si multentur quadrato illius quotientis, exhibebunt quadratos; atque ideò $\frac{1}{5}$ est numerus quæsitus. Hinc solvetur Problema sequens, quod est difficillimum.

Invenire alium numerum, quàm illum, qui mox exhibitus est, quo ducto in 13, 205, 218, *ac productis quadrato numeri quæsiti sigillatim multatis, fiant quadrati.*

Ponatur 1N + 5, pro solvendâ illâ æqualitate triplicatâ 13N -- 1. 205N -- 1. 218N -- 1. ac isti quidem per 1N + 5 resolvantur, fiéntque 13N + 64. 205N + 1024. 218N + 1089 æquandi quadratis. Hi inter se multiplicentur solidè, & productus illorum 71368704 + 43071296N + 8664361Q + 580970C æquetur quadrato: atque istius quidem quadrati fingatur latus 8448 + $\frac{67298}{264}$N + $\frac{15095711012 5}{11775836 16}$Q, & fiet pro valore, -- $\frac{10068246375169689907 2000}{22788049100310519718225}$, cui si addas 5, ob numerum 1N + 5, fit valor secundus

ſecundus & cõpletus Radicis, $\frac{5303112699942279807 65}{9115219640124207887 29}$.
Hic igitur valor completus ſi dividat 1, dabit in quotiente numerum quæſitum, quo ducto in 13. 205. 218. ac productis quadrato hujus multatis, fient quadrati; cujus examen factum eſt exactiſſimum. Eſt ergo numerus quæſitus $\frac{911521964012420788729}{530311269994227980765}$.

APPENDIX.

Lubet hîc attexere ſolutionem cujuſdam Problematis, quod mihi propoſitum eſt ſub finem anni 1669 ab Anonymo Pariſienſi, & eſt hujuſmodi. *Invenire numerum, quo ducto in* 18, 26, 53, *ſigillatim, ac productis quadrato numeri quæſiti multatis, fiant tres quadrati.* Fruſtrà hîc conatus ſum uti artificio, quo uſus ſum in præcedentibus, quare adhibenda fuit methodus nova, quæ hactenùs nemini, quod ſciam, venit in mentem. Ponatur numerus quæſitus 1 N, ergo 18N -- 1Q. 26N -- 1Q. 53N -- 1Q æquantur quadratis. Hinc jam ſequitur, quod ſæpiùs ſignificavi 18N -- 1. 26N -- 1 53N -- 1 quadratis æquari. Sed quis hanc triplicatam æqualitatem ſolvat? cùm nullus ibi ſit quadratus, neque in coſſicis, neque in ab-

ſolutis,

ſolutis, unde ſolutio erui poſſit, nec productus ſolidus ullum exhibeat quadratum? Adverti ego, ſi tribus illis adjungeretur quartus terminus habens defectum unitatis, perinde ac cæteri, fore, ut efficeretur quadratus in plano-plano ex illorum quatuor ductu orto: ſed neque hoc ſatis, nam ut contingat ſolutio, neceſſe eſt ut valor inventus vel ſit integer, vel habeat denominatorem quadratum, intellexíque id fieri aut ſemper, aut utplurimùm, ſtatim poſtquam deſinunt ſolutiones fictæ: quarè tentavi primùm per additionem unius & alterius termini, quid inde prodiret ad negotium præſens, advertíque 6N -- 1 cum tribus reliquis, dare numerum verum, ſed cujus denominator non eſſet quadratus: deinde adverti 4N -- 1 junctum cæteris dare numerum fictum pro ſolutione: hinc in tali medium inter illos 5N -- 1 daturum ſolutionem veram: nec me mea fefellit illatio, nam plano-planus ex illis quatuor 5N -- 1. 18N -- 1. 26N -- 1. eſt 124020QQ -- 38804C + 3285Q -- 102N + 1, qui æquatus quadrato lateris 1 -- 51N + 342Q dat valorem $\frac{5}{9}$. Vides denominatorem eſſe quadratum? Igitur iſta fractio eſt verus valor

pro

pro quadruplicatâ æqualitate ſequente 5N -- 1. 18N -- 1. 26N -- 1. 53N -- 1: ac proinde ſi 1 dividatur per illum valorem, fiet numerus ab initio quæſitus $\frac{9}{5}$.

Verùm lubet invenire per analyſim ſubtiliſſimam, alium numerum, qui ſolvat quæſtionem. Ponatur ergo $\frac{1}{18}Q + \frac{1}{3}N + \frac{5}{9}$ pro numero quæſito, ad triplicatam æquationem 18N -- 1. 26N -- 1. 53N -- 1. ſic enim multiplicando illum per illud 18. 26. 53. & tollendo à ſingulis unitatem, habetur primus numerus $1Q + 6N + 9$, ſecundus $\frac{13}{9}Q + \frac{78}{9}N + \frac{121}{9}$. tertius $\frac{53}{18}Q + \frac{159}{9}N + \frac{256}{9}$. atque hæc tria debent eſſe quadrata. Eſt autem primus terminus, quadratus à latere $1N + 3$. Igitur reſtat ut alios duos æquemus quadrato. Hoc autem facilè fiet ex methodo Diophanti, & invenitur pro valore, fractio defectiva, $-- \frac{605927604074496}{157110801064151}$. Ergò ſi hic valor reſolvatur juxta poſitionem ſuperiorem, habebitur numerus quæſitus pro triplicatâ æqualitate ſequente 18N -- 1. 26N -- 1. 53N -- 1, & erit $\frac{770394094406941315665909683702}{7997552434770230842061621659524}$. Pro aliâ autem æqualitate, quam hîc potiſſimùm intendimus, nimirùm pro 18N -- 1Q. 26N -- 1Q. 53N -- 1Q valor habebitur, ſi præcedens fractio

fractio dividat 1, quotiens enim erit numerus ab initio quæsitus: Horum verò omnium factum est examen rigorosum, & singula exactissimè quadrârunt.

Hinc etiam patet infinitos reperiri posse numeros integros, quibus per eosdem 5. 18. 26. 53 multiplicatis, & productis uno & eodem quadrato multatis, fiant quadrati: nam si valores inventi ducantur in quemcunque quadratum, id fiet quod proponitur, saltem in numeris fractis. Quoniam ergò sunt infiniti quadrati, qui multiplicantes $\frac{9}{5}$ producunt integros, manifestum est quotcunque integros reperiri posse cum requisitis conditionibus: ut si ducas $\frac{9}{5}$ in 25, fit 45, igitur 45 est numerus qui ductus in 5. 18. 26. 53 facit productos, quorum singuli multati 81, relinquunt quadratos 144. 729. 1089. 2304. Rursùs si ducas $\frac{9}{5}$ in 100, fiet 180, quo ducto in 5. 18. 26. 53, ac productis multatis quadrato 324, relinquuntur quadrati 576. 2916. 4356. 9216. Deinde si ducas eundem $\frac{9}{5}$ in 225 fiet 405, quo ducto in 5. 18. 26. 53, & productis quadrato 729 multatis, extabunt quadrati 1296. 6561. 9801. 20736. & sic deinceps in infinitum. Numeri inveniendi

veniendi semper erunt multiplices quinarii, & quadrati tollendi semper erunt multiplices novenarii.

Imò quoniam 41 -- 1N, idem præstat quod 5N -- 1, cum reliquis tribus, poterit proponi quæstio difficillima in hunc modum. *Invenire etiam in integris quotcumque numeros, quorum quolibet ducto in* 5. 18. 26. 41. 53. *ac productis uno & eodem quadrato multatis, supersint quadrati* : iidem enim numeri, quos mox invenimus, 45. 180. 405, solvunt Problema.

PROBLEMA XXII.

Invenire numerum quadratum, quo per quot quis voluerit, quadratos multiplicato, fiant producti quadrato & cubo exactè constantes.

AD hujus quæstionis enodationem, adverte numerum quemcunque ità se habere respectu eorum, qui naturali ordine progrediuntur per numeros in imparibus locis constitutos, ut si quadratus illius

per eos multiplicetur, & à productis tollatur cubus illius, restent quadrati. Vt si sumatur 7, primus ab illo 8 & tertius à 8, qui est 11, & quintus ab 11, qui est 16, &c. si ducantur in 49, & à productis 392, vel 539, aut 784, tollatur cubus 343, restabunt quadrati 49. 196. 441. & primus quidem, quadratus erit 7: secundus erit quadratus dupli 7, nempè 14: tertius erit quadratus tripli 7, nempè 21: & sic deinceps in infinitum.

Hoc posito, si quis jubeat inveniri sex quadratos, qui ducti in alium quadratum, exhibeant quadratos, cubo & quadrato constantes, cape septimum quadratum, qui est 49, & inde tolle omnes quadratos inferiores 1. 4. 9. 16. 25. 36. residuorum 48. 45. 40. 33. 24. 13. quadrati sunt qui postulantur: illi enim ducti in 49, producent quadratos ex cubo 343, & quadrato exactè compositos.

Rursùs, si quis velit duodecim quadratos, qui ducti in aliquem quadratum faciant compositos ex cubo & quadrato, cape quadratum decimum tertium, qui est 169,

169, & ex eo tolle omnes quadratos inferiores, residuorum enim 168. 165. 160. 153. 144. 135. 120. 105. 88. 69. 48. 25. quadrati erunt qui postulantur, ii enim ducti in 169 producunt compositos ex cubo & quadrato.

Denique si quis petat centum quadratos ejusmodi, qui ducti in aliquem quadratum, faciant quadratos ex cubo & quadrato compositos, cape centesimum primum quadratum, qui est 10201, & ex eo tolle omnes quadratos inferiores, residuorum enim quadrati in 10201 ducti, exhibebunt compositos ex quadrato & cubo.

PROBLEMA XXIII.

Invenire numerum quadratum, qui multatus quotcunque quadratis Geometricè proportionalibus, exhibeat residua, quorum quadrati in numerum quadratum ducti efficiant semper compositos ex cubo & quadrato.

SVmantur tres quadrati proportionales 1. 4. 16. Horum quadrati 1. 16. 256. tollantur ab alio quadrato superiori, qualis est 289, & residuorum quadrati ducantur in quadratum 289, efficietur primò 23970816 compositus ex cubo 23887872 & quadrato 82944: secundo fiet 21538881 compositus ex cubo 20346417 & quadrato 1192464: tertiò producetur 314721 compositus ex cubo 35937 & quadrato 278784. Idem est de pluribus.

PRO

PROBLEMA XXIV.

Invenire cubum, qui ductus in sex quadrato - quadratos, faciat compositos ex cubo & quadrato exactè.

INveniantur tria triangula rectangula, quorum hypotenusa sit idem cubus: Primum horum est 125. 100. 75. Secundum 125. 117. 44. Tertium 125. 35. 120. Quadratus igitur hypotenusæ 15625. cubus erit à latere 25, éstque cubus qui quæritur, enimverò si ille ducatur in quadrato - quadratos sex laterum circa rectum 100. 75. 117. 44. 35. 120, efficientur sigillatim sex numeri ex cubo & quadrato compositi exactè. Vt si 15625 ducatur in quadrato - quadratum primi lateris circa rectum 100, qui quadrato - quadratus est 100000000, fiet productus 1562500000000, unde si tollas cubum ipsius 10000, qui est 1000000000000, relinquetur

quadratus lateris 750000, qui eſt 562500000000. Idem eſt de reliquis lateribus.

CAPVT

CAPUT II.

Complectens Problemata singularia, quæ duos numeros spectant.

PROBLEMA I.

Invenire duos numeros, quorum summa ducta in summam cuborum ab illis ortorum, faciat quadratum.

PONANTUR illi 2 + 1 N & 2 -- 1 N. Horum cubi sunt 8 + 12 N + 6 Q + 1 C, & 8 -- 12 N + 6 Q -- 1 C. Summa verò cuborum erit 16 + 12 Q, quæ ducta in summam numerorum 4, facit 64 + 48 Q æquandum quadrato. Esto ille quadratus 49 Q, & fit valor 8. Verùm secundus quæsitorum positus est 2 -- 1 N,

 unde

unde ſequeretur illum eſſe numerum fi-
ctum -- 6. Vt occurratur huic incommodo, ponatur nova Radix 1N + 8, & juxta illam reſolvatur terminus 64 + 48Q, quem mox quadrato æquavimus: fiétque novus terminus 3136 + 768N + 48Q æquandus quadrato. Finge latus 56 + 10N, & fit pro valore -- $\frac{88}{13}$. Huic valori, ob novam Radicem, adde 8, & fiet valor pro primis poſitionibus, $\frac{16}{13}$. ac duo quæſiti $\frac{42}{13}$ & $\frac{10}{13}$.

Adverte, Problema poſſe ſolvi infinities, nam potuit fingi pro latere 56 plus quocunque numero Radicum, modò conſtet inter 12 & 8. Vt ſi ſumptum fuiſſet 56 + 9N, habuiſſemus -- $\frac{240}{33}$ pro valore, & duo quæſiti fuiſſent $\frac{90}{33}$ & $\frac{42}{33}$. Iam igitur vides 4 diviſum eſſe bis in duos, quorum ſumma ducta in ſummam cuborum facit quadratos: cùm igitur ſint alij infiniti, ſaltem fracti, ſolvi potuit infinities.

PRO

PROBLEMA II.

Invenire duos numeros, quorum summa ducta in summam quadratorum ab ipsis ortorum, faciat cubum.

Eligendus est primò numerus, qui ductus in suum quadratum, faciat cubum: sunt autem innumeri, inter quos eligo 2, & ita pono duos numeros quæsitos 1 N & 2 -- 1 N. Horum quadrata sunt 1 Q & 4 -- 4 N + 1 Q. Igitur eorum quadratorum summa 2Q -- 4N + 4 ducta in 2, facit 8 -- 8N + 4Q æquandum cubo. Finge latus cubi 2 -- $\frac{2}{3}$N, & fit valor -- $\frac{9}{2}$. Est autem ille numerus fictus, qui expungetur hoc pacto. Pone pro novâ Radice 1 N + $\frac{9}{2}$, & juxta illam, resolve 8 -- 8 N + 4 Q, & fit alius terminus 125 -- 44N + 4Q cubo æquandus. Finge latus cubi 5 -- $\frac{44}{75}$N, & fit pro valore Radicis, $\frac{122625}{21296}$. Hinc tolle $\frac{9}{2}$, ob novam Radicem: fiétque $\frac{26793}{21296}$. Igitur duo numeri quæsiti sunt 26793 & 15799: eorum enim summa ducta in summam quadratorum, facit cubum à latere 34540.

PROBLEMA III.

Invenire duos numeros, quorum productus detractus eorum utrilibet, aut summæ, aut differentiæ, relinquat quadratos: nec solùm semel id præstare, sed etiam infinities.

SInt illi duo numeri 1N & 1 -- 1N: sic enim satisfit duobus postulatis, nam productus 1N -- 1Q alterutri illorum detractus facit infinitè quadratos 1Q & 1 -- 2N + 1Q. Quare superest duntaxat, ut detractus summæ, nec non differentiæ, relinquat quadratos: relinquit autem 1 -- 1N + 1Q & 1 -- 3N + 1Q. Igitur illi sunt æquandi quadratis. Ex hâc autem duplicatâ æqualitate fit pro valore $\frac{3}{8}$, & juxta positiones, duo numeri quæsiti sunt $\frac{3}{8}$ & $\frac{5}{8}$.

Ad secundam solutionem sic operare: quoniam invenisti pro valore $\frac{3}{8}$, pone jam pro novâ Radice 1N + $\frac{3}{8}$, & juxta hanc resolve duos terminos in præcedenti operatione,

ratione, quadrato æquatos, nempè $1 - 1N + 1Q$ & $1 - 3N + 1Q$, fiéntque novi termini quadrato æquandi : primus quidem $1Q - \frac{1}{4}N + \frac{49}{64}$, secundus autem $1Q - \frac{9}{4}N + \frac{1}{64}$. Multiplica posteriorem terminum per 49, ut unitatum numerus fiat utrobique idem quadratus, & habebis primum terminum $49Q - \frac{441}{4}N + \frac{49}{64}$ secundum verò $1Q - \frac{1}{4}N + \frac{49}{64}$. Horum terminorum differentia est $48Q - 110N$, quam producunt $\frac{440}{7}N$ & $\frac{42}{55}N - \frac{7}{4}$. Horum producentium summæ semissis quadratus æquatus majori ex duobus præcedentibus terminis, dat pro valore, $-\frac{12459200603}{21979861536}$. Huic adde $\frac{3}{8}$, ob novam Radicem, & fient duo numeri quæsiti $\frac{249875197}{784992912}$, & $\frac{535117715}{784992912}$.

Tertia solutio invenietur ponendo $\frac{1}{1N}$ pro primo numero, & $1 - \frac{1}{1N}$ pro secundo. Ex his enim positionibus, invenies pro valore $\frac{8}{3}$. Quare pones pro novâ Radice $1N + \frac{8}{3}$, & omnia examinabis uti mox factum est, & reperies pro valore, $\frac{24089}{10416}$. Huic adde $\frac{8}{3}$, ob novam Radicem, fiétque valor completus $\frac{51865}{10416}$. At posita est $\frac{1}{1N}$ pro primo numero, igitur dividenda est unitas per hunc valorem completum, & primus numerus

numerus erit $\frac{10416}{51865}$. Hunc tolle ab 1, extabitque secundus numerus quæsitus $\frac{41449}{51865}$.

APPENDIX.

Ex his solvetur triplex Problema, quorum primum est. *Dividere 2 in tres numeros, quorum productus solidus detractus cuilibet illorum, ac insuper singulis eorum differentiis, relinquat quadratos*; Si enim duobus inventis addas 1 pro tertio, habebuntur tria segmenta 2 quæsita. Secundum Problema est ejusmodi. *Dividere 8, vel 51865, vel 784992912 (hi sunt denominatores numerorum in quâlibet ex tribus prædictis operationibus inventorum) in duos integros, quorum productus, numeri divisi quadrato detractus, & producto cuilibet ex numero diviso in singula segmenta, & segmentorum differentiam, relinquat quadratos.* Numeratores prædicti sunt segmenta quæsita, nempè 3 & 5 sunt segmenta numeri 8. Rursùs 10416 & 41449 sunt segmenta numeri 51865. Denique 249875197 & 535117715 sunt segmenta numeri 784992912. Problema tertium est. *Dividere 16. vel* 103730, *vel* 1569985824 (*dupla sunt denominatorum in Problemate inventorum*

ventorum) in tres integros, quorum productus ſolidus, producto cuilibet ex numero diviſo in ſingula ſegmenta detractus, nec non producto cuilibet ex eodem numero diviſo in ſingulas ſegmentorum differentias, relinquat quadratos. Tria ſegmenta primi ſunt 3. 5. 8. Tria ſegmenta ſecundi ſunt 10416. 41449. 51865. Tria ſegmenta tertii ſunt 249875197. 535117715. 784992912.

PROBLEMA IV.

Invenire duos numeros, itaut differentia quadratorum ab illis ortorum, detracta utrilibet illorum, aut ſummæ, aut differentiæ, relinquat quadratos.

POnatur ſumma numerorum quæſitorum 1 -- 2N, & differentia illorum 2N. Hinc enim numeri quæſiti ſigillatim non latebunt, ſiquidem ſumma addita differentiæ dat duplum majoris, & ſumma eadem multata differentiâ dat duplum minoris, ac proinde major quæſitorum erit $\frac{1}{2}$, minor verò quæſitorum erit $\frac{1}{2}$ -- 1N. Ergo differentia quadratorum ab illis numeris ortorum eſt

2N

$2N - 4Q$, quæ ſi auferatur ex ſummâ $1 - 2N$, & ex differentiâ $2N$, relinquit infinitè quadratos $1 - 4N + 4Q$, & $4Q$. Supereſt igitur, ut hoc idem intervallum quadratorum $2N - 4Q$ detractum ſigillatim duobus numeris quæſitis, relinquat quadratos: relinquit autem dimidium $1 - 2N + 4Q$, & dimidium $1 - 4N + 4Q$: illi igitur ſunt quadratis æquandi, & fit ex illâ æqualitate duplicatâ valor $\frac{7}{48}$. Erunt ergò numeri quæſiti $\frac{12}{24}$ & $\frac{5}{24}$.

PROBLEMA V.

Invenire duos numeros, quorum ſumma aucta vel multata differentiâ illorum, aut differentiâ quadratorum ab illis ortorum, quatuor efficiat quadratos: & rursùs eadem ſumma aucta triplo differentiæ illorum, aut triplo differentiæ quadratorum ab illis, duos alios exhibeat quadratos.

POnantur duo numeri quæſiti, $\frac{1 + 1N}{2}$, & $\frac{1 - 1N}{2}$: ſic enim differentia numerorum

merorum æquabitur differentiæ quadratorum, eritque utrobique differentia illa 2N. Quare juxta conditiones quæstioni appositas, sextuplicata æqualitas revocabitur ad triplicatam, eruntque duntaxat 1 + 2 N. 1 -- 2 N. 1 + 6N. æquandi quadratis, quia reliqui tres æquantur quadratis infinitè. Horum autem trium terminorum productus solidus 1 + 6 N -- 4 Q -- 24 C debet æquari quadrato. Finge latus 1 + 3 N -- $\frac{13}{2}$ Q, & fit pro valore $\frac{60}{169}$. ac duo quæsiti erunt $\frac{289,\ \&\ 49}{338}$.

PROBLEMA VI.

Invenire duos numeros, quorum differentia sit æqualis differentiæ quadrato-quadratorum ab illis ortorum.

INventi sunt suprà (Probl. 2.) duo numeri quorum summa ducta in summam quadratorum suorum, facit cubum, nempè 26793 & 15799. Divide illos sigillatim per latus cubi, quem efficiunt, scilicèt 34540, & fiet quod postulatur, nempè $\frac{26793.\ 15799}{34540}$.

Affine

Affine eſt illi Problema quod ſequitur. *Invenire duos numeros, quorum ſumma ſit æqualis differentiæ quadrato-quadratorum*: ſed vix eſt in eo ulla difficultas, numeri enim quæſiti ſunt $\frac{13}{10}$ & $\frac{9}{10}$.

PROBLEMA VII.

Datis duobus numeris, quorum quilibet, ac ſumma eorum, ſi addatur unitati faciat quadratum, invenire alios duos in eâdem ratione cum prioribus, qui idem præſtent.

DEntur 15, & 48, qui ſigillatim additi unitati, faciunt 16, & 49: & quorum ſumma eidem unitati addita, facit 64. Ponantur autem quæſiti 5N & 16N: ut ſint in eâdem ratione. Ergo 1 + 5N. 1 + 16N. 1 + 21N æquantur quadratis, éſtque valor Radicis 3. Primo illorum adde 15, ſecundo 48, & tertio 63, fient ſummæ 16 + 5N. 49 + 16N. 64 + 21N æquanda quadratis. Harum igitur ſummarum productus ſolidus 1680C + 15641Q + 48528N + 50176

$+ 50176$ est quadrato æquandus. Finge latus $224 + \frac{3033}{28}N + \frac{3063455}{351232}Q$, & fit pro valore fractio defectiva $-- \frac{25852741824000}{93247565337025}$. Huic valori adde 3, quem diximus fuisse valorem primarum positionum, & extabit valor completus, $\frac{9206111483}{375390261481}$. Hunc si ducas in 5 & 16 juxta positiones, fient duo numeri quæsiti.

PROBLEMA VIII.

Datis duobus numeris, quorum quilibet ac eorum summa, si multetur unitate, faciat quadratos, invenire duos alios in eâdem ratione, qui idem præstent.

DEntur 65 & 1025, qui unitate multati faciunt 64, & 1024, & quorum summa 1090 unitate multata, facit 1089 (sunt hi tres quadrati à lateribus 8. 32. 33.) Ponantur autem duo quæsiti 13N & 205N qui sunt in eâdem ratione cum 65 & 1025: Igitur $13N -- 1$. $205N -- 1$. $218N -- 1$. æquantur quadratis, & est valor Radicis 5. Ponatur itaque nova Radix $1N + 5$, &

juxta eam resolvantur prædictæ positiones, fiéntque tres novi termini $13N + 64$. $205N + 1024$. $218N + 1089$ æquandi quadrato. Horum igitur productus solidus $580970C + 8664361Q + 43071296N + 71368704$ erit quadrato æquandus. Finge latus $8448 + \frac{672989}{264}N + \frac{15095711035}{1177583616}Q$, & fit pro valore fractio defectiva $-\frac{1006824637516968899072000}{227880491003105197182225}$. Huic valori adde 5, ob novam Radicem, & fiet pro valore in minimis, $\frac{53031126999422279807 65}{911521964012420788729}$. Hunc ergo valorem si juxta positiones ducas in 13 & 205, fient duo numeri quæsiti.

PROBLEMA IX.

Invenire duos numeros in datâ ratione, quorum quilibet, ac datus multiplex summæ eorum additus quadrato datæ partis alterutrius illorum, faciat quadratos.

Sit data ratio numerorum quæsitorum 2 ad 5, & oporteat duplam eorum summam cum quolibet ex illis sigillatim addi quadrato

quadrato semissis unius ex illis, & fieri quadratos. Ponantur duo quæsiti 2N & 5N, capiatúrque quadratus semissis primi, qui est 1Q. Igitur 1Q + 2N. 1Q + 5N. 1Q + 14N sunt æquandi quadratis. Ergo 1 + 2N. 1 + 5N. 1 + 14N quadratis æquabuntur. Productus illorum solidus 1 + 21N + 108Q + 140C æquetur quadrato cuipiam à latere 1 + $\frac{21}{2}$N -- $\frac{9}{8}$Q, & fiet pro valore, $\frac{10472}{81}$. Hic autem valor satisfacit triplicatæ æqualitati posteriori 1 + 2N. 1 + 5N. 1 + 14N. At si per eum valorem dividatur 1, fiet valor pro triplicatâ æqualitate priori 1Q + 2N. 1Q + 5N. 1Q + 14N. nempè $\frac{81}{10472}$. Igitur duo numeri quæsiti sunt $\frac{162}{10472}$, & $\frac{405}{10472}$.

PROBLEMA X.

Invenire duos numeros in datâ ratione, quorum quilibet, ac data pars summæ illorum si subtrahatur ex quadrato datæ partis alterutrius, faciat quadratos.

ESto data ratio 3 ad 5, & jubeatur dimidium summæ quæsitorum numerorum

cum quolibet eorum ſubtrahi ſigillatim ex quadrato trientis unius ex illis, itaut reſtent quadrati. Ponantur duo quæſiti 3N & 5N, erit igitur dimidium ſummæ illorum 4N. Quadratum trientis primi quæſiti eſt 1Q. Ergo 1Q -- 5N. 1Q -- 4N. 1Q -- 3N. æquantur quadratis: ac proinde 1 -- 5N. 1 -- 4N. 1 -- 3N quadratis quoque æquabuntur. Horum productus ſolidus 1 -- 12N + 47Q -- 60C æquetur quadrato, fingendo latus 1 -- 6N + $\frac{11}{2}$Q, & fit valor $\frac{24}{121}$, pro triplicatâ æqualitate poſteriori 1 -- 5N. 1 -- 4N. 1 -- 3N. Per hunc valorem, divide 1, & habebis valorem pro triplicatâ æqualitate priori 1Q -- 5N. 1Q -- 4N. 1Q -- 3N: nempè $\frac{121}{24}$. erúntque duo quæſiti $\frac{363.\ 605}{24}$.

APPENDIX.

Hîc moneo, poſſe dari talem rationem, aut partem, ut inde pro valore naſcantur numeri ficti: verùm non proptereà deſpondendus eſt animus, ſed nectendus numerus fictus 1N, cum ſuo ſigno, atque juxta hanc novam Radicem reſolvendus terminus æquatus, ut fiat numerus verus in ſecundâ operatione.

PRO

PROBLEMA XI.

Invenire duos numeros, itaut centuplus cubus differentiæ quadratorum æquetur decuplo quadrato differentiæ numerorum, & reciprocè centuplus cubus differentiæ numerorum, æqualis sit decuplo quadrato differentiæ quadratorum.

QVæstio ista facilis est: ponantur enim duo quæsiti $\frac{1}{2} + 1N$ & $\frac{1}{2} - 1N$, ità siquidem fiet 2N tùm pro differentiâ numerorum, tùm pro differentiâ quadratorum. Ergo cubus differentiæ quadratorum est 8 C, & centuplum istius cubi 800 C, quadratus autem ejusdem 2N est 4Q, cujus decuplum est 40 Q. Quare 40 Q æquantur 800 C, & fit valor $\frac{1}{20}$, & duo quæsiti $\frac{11}{20}$. $\frac{9}{20}$.

PROBLEMA XII.

Invenire duos numeros, itaut duodecuplus quadratus summæ illorum, æquetur quintuplo cubo differentiæ quadratorum ab illis ortorum: & reciprocè duodecuplus quadratus differentiæ quadratorum, æquetur quintuplo cubo summæ numerorum.

POnantur duo quæſiti $1N + \frac{1}{2}$ & $1N - \frac{1}{2}$: ita enim eorum differentia eſt 1, ac proinde ſumma numerorum æqualis erit differentiæ quadratorum 2 N. Iam autem quadratus duodecuplus ſummæ erit 48 Q, & quintuplus cubus differentiæ erit 40 C. Quare eſt æqualitas inter illa duo, & fit valor $\frac{6}{5}$: ac duo quæſiti ſunt $\frac{17}{10}$. $\frac{7}{10}$.

PRO

PROBLEMA XIII.

Invenire duos numeros, itaut productus ſolidus ex eorum differentiâ in quadratum majoris ſit 864: productus autem ſolidus ex illorum ſummâ in minoris quadratum, ſit 648.

QVærantur primùm duo numeri, quorum differentia ducta in quadratum majoris ad productum ex ſummâ eorum in quadratum minoris, habeat rationem 864 ad 648, ſeu 4 ad 3. & ponantur duo quæſiti ut libet: major ſit 6, minor verò 1 N. Ergò 216 -- 36 N, qui eſt productus ex differentiâ numerorum in quadratum majoris, ad 6 Q + 1 C, qui eſt productus ex quadrato minoris in eorum ſummam, erit ut 4 ad 3: ac proinde, ſi ducatur 216 -- 36 N in 3, fiet productus 648 -- 108 N æqualis 24 Q + 4 C (ſeu

producto ex $6Q + 1C$ in 4 :) ac post debitam metathesim, & divisionem, erit $1C + 6Q + 27N$ æqualis 162.

Ista autem æquatio sic reducitur ad simpliciores terminos. Triplum quadratum trientis numeri quadratorum 12 tolle ex coëfficiente 27, & fit 15, fiétque $1C + 15N$ æqualis cuidam homogeneo, quem sic reperies. Duc 15 mox repertum in trientem numeri quadratorum 2, & fit 30. Adde cubum ejusdem trientis, nempè 8, & habebitur 38, cui si adjicias homogeneum 162, efficitur 200. Igitur $1C + 15N$ æquatur 200.

In hâc verò æquatione sic invenies valorem Radicis. Cubum trientis numeri Radicum 125 adde quadrato dimidii homogenii 10000, & fit 10125, cujus radici quadratæ adde dimidium homogeneum, & fit ℞ 10125 + 100. Hujus radix cubica multata radice cubicâ apotomes ℞ 10125 -- 100, dat valorem Radicis pro secundâ æquatione. Huic igitur residuo si detrahas 2, extabit valor Radicis pro æquatione primâ, ℞ cub.

(℞

(℞ 10125 + 100) -- ℞ cub. (℞ 10125 -- 100) -- 2.

At ex illo binomio ℞ 10125 + 100, & ex apotome ℞ 10125 -- 100 potest extrahi radix cubica per methodum Francisci à Schooten, estque radix binonii ℞ $\frac{45}{4}$ + $\frac{5}{2}$, & radix apotomes ℞ $\frac{45}{4}$ -- $\frac{5}{2}$. Ergo si hanc ab illâ subtrahas, fiet 5, unde sublato 2, restat 3 pro valore Radicis, & duo quæsiti 6. 3.

Iam itaque ad primariam quæstionem sic procedes. Solidus ex duorum inventorum differentiâ 3 in quadratum majoris 36 est 108, per quem divide primum ex duobus datis 864, & fit quotiens 8 (idem fiet si duorum inventorum summa 9 ducatur in quadratum minoris 9, fit enim 81, per quem si dividas secundum ex duobus datis 648, fit rursùs quotiens 8.) Hujus radix cubica 2 ducta in duos inventos 6 & 3, dat duos quæsitos 12 & 6.

PROBLEMA XIV.

Invenire duos numeros, quorum summa ducta in summam quadratorum, faciat 715, differentia autem ducta in quadratorum differentiam, faciat 99.

QVærantur primùm duo numeri, quorum summa ducta in summam quadratorum habeat rationem 715 ad 99, ad productum ex differentiâ numerorum in quadratorum differentiam. Et ponantur ut libet, major quidem 1 N, & minor 1. Ergo summa 1 N + 1 in quadratorum summam 1 Q + 1 facit 1 C + 1 Q + 1 N + 1. Productus autem ex differentiâ numerorum 1 N -- 1 in differentiam quadratorum 1 Q -- 1, est 1 C -- 1 Q -- 1 N + 1. Igitur prior productus ad posteriorem est ut 715 ad 99: & ità qui sub extremis illorum est 99 C + 99 Q + 99 N + 99 æquatur ei qui est

est sub mediis $715C - 715Q - 715N + 715$, & post debitam metathesim ac divisionem, fiet $1C + 1$ æqualis $\frac{407}{308}Q + \frac{407}{308}N$: & dividendo utramque partem æquationis per summam numerorum $1N + 1$, fit primus quotiens $1Q - 1N + 1$ æqualis secundo quotienti $\frac{407}{308}N$: igitur $1N$ æquatur $\frac{77}{44}$, & fiunt duo quæsiti $\frac{77}{44}$. 1.

Iam igitur ad primariam quæstionem sic procedes. Cape productum solidum ex summâ duorum mox inventorum in summam quadratorum ab illis ortorum, ac per illum dividatur primus ex duobus datis 715, & fiet 64 in quotiente, cujus radix cubica 4 ducta in duos inventos, dabit duos quæsitos 7 & 4. Vel cape productum solidum ex differentiâ numerorum in differentiam quadratorum, ac per illum dividatur secundus ex duobus datis 99, & fiet rursùs in quotiente 64, cujus radix cubica 4 ducta in duos inventos dabit eosdem 7 & 4. Vel si volueris, duo quæsiti in integris erunt 77 & 44: horum summa 121 ducta in summam quadratorum 7865, facit 951665. Hunc si dividas per primum datum 715, fit

fit cubus 1331, cujus radix cubica 11 ducta in 77 & 44 dat 847 & 484, hos divide per 121, & fient duo quæsiti 7 & 4. Vel differentia 77 & 44, quæ est 33, ducatur in differentiam quadratorum 3993, productum divide per 99, qui est secundus ex duobus datis, fiétque rursùs 1331, cujus radix cubica 11 idem præstabit quod prius.

PROBLEMA XV.

Invenire duos numeros, quorum summa, & uterlibet eorum, si addatur eidem numero, faciat cubos.

Cape quemlibet cubum non minorem 512, putà 8000, hinc tolle duos cubos proximè minores 5859 & 5832, residua duo sunt 2141 & 2168. Hæc residua reciprocè tollantur ex duobus cubis proximè inferioribus assumptis: hoc est primum residuum tollatur ex secundo inferiore, & secundum residuum ex primo, & ex utráque subtractione,

tractione, fiet idem numerus addendus 3691: duo autem quæſiti ſunt 2141 & 2168.

Rursùs cape cubum 729, & ex eo tolle 512 & 343. Duo reſidua 217 & 386 erunt numeri quæſiti. Qui verò debet addi, invenietur ut ſuprà, vel tollendo 386 de 512, vel tollendo 217 de 343, fiet enim idem numerus 126 addendus.

Adverte, aliquando praxim illam fieri poſſe, licèt non tollantur cubi proximè inferiores: eos tamen definivimus, ut regula reddatur univerſalis. Si illud Problema proponatur de quadrato-quadrato, debet ſumi quadrato-quadratus non minor 10000.

PRO

PROBLEMA XVI.

Invenire duos numeros, quorum summa, & uterlibet, si multetur uno & eodem numero, relinquat quadrato-quadratos.

CApe quemcunque quadrato-quadratum 6561, ex quo possint tolli duo quadrato-quadrati inferiores 4096 & 2401: ac duo residua reciprocè multentur iisdem quadrato-quadratis inferioribus: hoc est 4096 tollatur ex secundo residuo 4160, & 2401 tollatur ex residuo primo 2465, sic enim fiet idem numerus tollendus 64, & duo quæsiti erunt duo priora residua 2465 & 4160.

PRO

PROBLEMA XVII.

Invenire duo quadrata, quorum differentia addita majori faciat quadratum, & quorum minus ad majus habeat proportionem majorem quâcunque datâ proportione minoris inæqualitatis.

Aliter sic potuit proponi quæstio. *Invenire tres quadratos Arithmeticè proportionales.* Sint igitur duo quadrati quæsiti 1Q & 1Q + 2N + 1. ergo differentia illorum addita majori, facit 1Q + 4N + 2 æquandum quadrato. Finge latus hujus quadrati 1N -- 2, & fit valor $\frac{1}{4}$, juxta quem si resolvas duos quadratos superiores, fient in integris 1 & 25.

Adverte autem, quò major erit numerus absolutus, qui ponitur in latere cum notâ defectûs, eò majorem fore proportionem minoris quadrati ad majorem: ut si posuisses pro latere 1N -- 3, duo quadrati fuissent 49 & 289. Si posuisses 1N -- 4, duo quadrati fuissent

fuissent 49 & 169. Si posuisses 1 N -- 5, duo quadrati fuissent 529 & 1369. Si posuisses 1 N -- 10, duo quadrati fuissent 2401 & 3721. Si posuisses 1 N -- 20, duo quadrati fuissent 39601 & 48841. Denique si posuisses 1 N -- 100, duo quadrati fuissent 24990001 & 26020201.

Cùm igitur possit semper augeri iste numerus defectivus in infinitum, poterit infinitè augeri proportio minoris quadrati ad majus : & ita major tandem erit proportio quâcunque proportione datâ minoris inæqualitatis. Vnde si posuisses pro latere 1 N -- 1000, duo quadrati fuissent 999996000004 & 1004008008004.

Quoniam verò hi quadrati ad multa utiles sunt, subjicio hîc aliquot paria quadratorum ejusdem naturæ, & à prioribus differentium. Primum par 289. 625. Secundum 961. 1681. Tertium 25921. 32761. Quartum 5041. 7225. Quintum 9409. 12769. Sextum 16129. 21025. Possunt continuari in infinitum. Imò duo quicunque ex prædictis in quemcunque quadratum ducti, idem præstant.

CAPVT

CAPVT III.

Complectens Problemata singularia, quæ tres numeros spectant.

PROBLEMA I.

Invenire tres numeros, quorum primus additus quadrato secundi, secundus additus quadrato tertii, tertius additus quadrato primi, quadratum denique primi additum secundo, faciat quadratos.

PONANTVR tres quæsiti 1 N. 1 -- 2N. 8N. sic enim fit satis duobus postulatis infinitè: nam & tertius additus quadrato secundi, & secundus additus quadrato pri-

mi, faciunt quadratos $1 + 4N + 4Q$ & $1 - 2N + 1Q$. Supereſt igitur duntaxat, ut $1 - 3N + 4Q$ & $1 - 2N + 64Q$ æquentur quadratis; æquabuntur autem ſi illorum productus $1 - 5N + 74Q - 200C + 256QQ$ æquetur quadrato. Finge latus $1 - \frac{5}{2}N + 16Q$, & fit valor $\frac{143}{480}$, & tres quæſiti erunt $\frac{143.\ 194.\ 1144}{480}$.

Adverte in ſuperiore producto, non ſolùm numerum unitatum, ſed etiam numerum quadrato-quadratorum eſſe quadratum: quare præter duos numeros fictos, poſſunt exhiberi tres aliæ ſolutiones: nam alius valor Radicis erit $\frac{399}{1120}$, alius $\frac{280}{1071}$, alius denique $\frac{50337}{2266880}$.

Neque eſt omittendum, alias poſitiones ab initio conſtitui poſſe, nam tres numeri quæſiti poſſunt poni $1 - 2N.\ 1N.\ 4 + 4N$: vel $1 + 2N.\ 1N.\ 4 - 4N$: vel $1 + 2N.\ 1N.\ 4 + 4N$. & aliæ in infinitum.

PRO

PROBLEMA II.

Invenire tres numeros, quorum quilibet ac ſumma eorum, ſi multetur quadrato primi, efficiant quadratos.

POnantur tres quæſiti 1 N. 2 N. 10 N. Horum ſumma eſt 13 N. Quare 1 N — 1 Q. 2 N — 1 Q. 10 N — 1 Q. 13 N — 1 Q, & rursùs 1 N — 1. 2 N — 1. 10 N — 1. æquabuntur quadratis. Horum quatuor poſteriorum plano-planus eſt 260 QQ — 436 C + 201 Q — 26 N + 1, debet igitur ille æquari quadrato à latere 1 — 13 N + 16 Q, & fiet valor 5 pro quadruplicatâ æqualitate poſteriori: ac proinde ſi unitatem dividas per 5, fiet valor pro quadruplicatâ æqualitate priori, $\frac{1}{5}$, & tres quæſiti erunt $\frac{1.\ 2.\ 10}{5}$.

PROBLEMA III.

Invenire tres numeros, itaut cubus summæ illorum quovis multatus, relinquat cubos.

CApe cubos à lateribus 1N -- 1. 4N -- 1. 2. & eos tolle à 64 sigillatim, tria residua sunt 65 -- 3N + 1Q -- 1C. 1C + 48N -- 124. 56. horum summa 121 + 45N -- 9Q æquetur 4 (radici cubicæ 64) & fit $\frac{121 + 45N -- 9Q}{4}$ æquandus quadrato. Quoniam verò denominator quadratus est, sufficiet numeratorem 121 + 45N -- 9Q æquare quadrato. Hoc autem innumeris modis fieri potest: Finge latus 11 + 1N, & fit valor $\frac{23}{10}$. Ergo latera posita 1N -- 1. 4 -- 1N. 2. erunt $\frac{13.\ 17.\ 20}{10}$. Horum cubi si tollantur ex 64, relinquuntur $\frac{61803.\ 59087.\ 56000}{1000}$. Si igitur ponas primum ex tribus quæsitis 61803C, secundum 59087C, tertium 56000C, & eos tollas ex 64000C, restabunt tres cubi 2197C. 4913C. 8000C. Illorum igitur trium summam 176890C si æques

ſi æques 40 N, fit valor $\frac{2}{133}$. Igitur juxta poſitiones numeri tres quæſiti erunt $\frac{494424.\ 472696.\ 448000}{2352637}$.

Sic ſolvetur Problema ſequens. *Invenire quatuor numeros, itaut cubus ſummæ illorum quolibet multatus, relinquat cubum.* Numeri enim quæſiti ſunt $\frac{12172736.\ 11296152.\ 9112168.\ 4724776}{64481201}$.

PROBLEMA IV.

Invenire tres numeros, quorum quilibet ductus in alios duos ſigillatim, faciat unum productum ex duobus quadratis compoſitum: alium verò productum ex cubo & quadrato compoſitum exactè.

IAm oſtenſum eſt ſuprà in Capite primo, numeros 18. 26. 53. tales eſſe, ut ſi ducantur in 45 faciunt 810. 1170. 2385. quorum primus componitur ex quadratis 729. 81. ſecundus ex quadratis 1089. 81. & tertius ex quadratis 2304. 81. Supereſt ergò ut inveniatur numerus, qui ductus

in eosdem 18. 26. 53. faciat compositos ex cubo & quadrato. Et quoniam difficile est istud directè invenire, quæro priùs numerum, quo ducto in 18. 26. 53, ac productis unitate multatis, fiant quadrati. Sit verò ille numerus 1N, ergo 18N — 1. 26N — 1. 53N — 1 æquandi sunt quadratis. Hoc ut fiat cum fine intento, adjungendus erit quartus terminus 21N — 1: sic enim plano-planus illorum quatuor 520884QQ — 83604C + 4837Q — 118N + 1 æquatus quadrato à latere 1 — 59N + 678Q, dat $\frac{1}{17}$ pro valore. Hunc itaque valorem si ducas in quadratum 289, fiet quotiens 17: si verò hunc eundem valorem ducas in cubum 4913, fiet numerus 289.

Ergo tres quæsiti sunt 18. 26. 53, qui ducti sigillatim in 45, faciunt compositos ex duobus quadratis 810. 1170. 2385. ut jam demonstratum est. Iidem autem ducti in 289, faciunt 5202. 7514. 15317 compositos ex cubo & quadrato, nam primus illorum componitur ex 4913 & 289, secundus ex 4913 & 2601, & tertius ex 4913 & 10404.

Imò possunt eâdem arte inveniri qua-
tuor

tuor numeri 18. 16. 53. 117, qui ſigillatim ducti in 5 & 289, dabunt in primo ordine quatuor productos, quorum primus 90 componitur ex duobus quadratis 81 & 9. Secundus 130 ex duobus quadratis 121 & 9. Tertius 265 ex duobus quadratis 256 & 9. Quartus 585 ex duobus quadratis 576 & 9. In ſecundo autem ordine habebuntur quatuor producti, quorum primus 5202 componitur ex quadrato 289 & cubo 4913. Secundus 7514 ex quadrato 2601, & cubo 4913. Tertius 15317 ex quadrato 10404, & cubo 4913. Quartus denique 33813 ex quadrato 28900, & cubo 4913.

PROBLEMA V.

Invenire tres numeros, quorum quilibet multatus alio quarto, utique inveniendo, relinquat quadratos: atque insuper minoris & alterutrius ex duobus majoribus summa, vel differentia, eodem quarto multata, quadratos quoque efficiat.

QVærantur primùm duo, quorum si utervis, aut summa, aut differentia, multetur eodem numero, relinquantur quadrati: id autem efficies hunc in modum. Cape quemlibet quadratum, putà 16 Q, cui adde quemlibet numerum Radicis charactere affectum, esto is 4 N; & ponatur primus quæsitorum 16 Q + 4 N. Deinde eligantur duo, qui hunc compositum producant, nempè 2 N & 8 N + 2, & horum producentium summæ semissis quadratus 25 Q + 10 N + 1 augeatur 4 N, ut fiat secundus quæsitus 25 Q + 14 N + 1; sic enim

enim duo illi numeri ſatisfaciunt tribus poſtulatis, nam & horum utervis, ac differentia, ſi multetur 4 N, efficiet quadratum. Superéſtque duntaxat ut eorum ſumma 41 Q + 18 N + 1 multata 4 N (quem nos ſupponimus eſſe quartum quæſitum) æquetur quadrato. Finge latus 7 N -- 1, & fit valor $\frac{7}{2}$, & duo quæſiti 210 & $\frac{1425}{4}$. Quartus autem, qui fuit 4 N, erit 14. Et ductis illis tribus in 4, ut habeantur integri, erunt duo quæſiti 840 & 1425, numerus verò quartus 56.

Iam verò aliter, ponatur primus 4 Q + 4 N, & ſecundus 4 Q + 8 N + 1: ſic enim ſatisfit tribus poſtulatis, nam quilibet eorum, atque inſuper illorum differentia, ſi multetur 4 N, relinquit quadratum infinitè. Reſtat igitur tantùm, ut eorum ſumma 8 Q + 12 N + 1 æquetur quadrato. Finge latus 1 -- 3 N, & fit 14 pro valore, & 840 pro primo, atque 897 pro ſecundo. Tres igitur ab initio quæſiti ſunt 1425. 897. 840, & quartus tollendus 56.

PROBLEMA VI.

Invenire tres numeros Geometricè proportionales, itaut differentia duorum quorumlibet addita uni & eidem numero, faciat cubos.

QVærantur primùm (ex 15. cap. 2.) duo numeri, quorum ſumma & uterlibet eorum, ſi addatur eidem numero, faciat cubos. Tales ſunt 657 & 271. Tùm ponantur tres quæſiti 1 N + 657. 1N. 1N -- 271. Tres illi tales ſunt, ut quicunque numerus ſumptus pro valore Radicis, modò ſit major 271, ſolveret quæſtionem, ſi forent illi proportionales: efficientur autem, ſi productus extremorum 1Q + 386N -- 178047 æquetur quadrato medii 1Q. In illâ verò æquatione fit valor $\frac{178047}{386}$. ac proinde tres numeri quæſiti ſunt $\frac{431649.\ 178047.\ 73441}{386}$. Numerus, qui debet addi, eſt 72.

PRO

PROBLEMA VII.

Invenire tres numeros Harmonicè proportionales, itaut differentia duorum quorumlibet uni & eidem numero addita, cubos efficiat.

POnantur iidem numeri, qui suprà, ob eandem rationem, nempè 1N + 657. 1N. 1N -- 271. Supereſt ergo, ut ſint proportionales Harmonicè, ſeu ut productus ex primo in differentiam ſecundi & tertii 271N + 178047, æquetur producto ex tertio in differentiam primi & ſecundi 657N -- 178047, & fit valor $\frac{178047}{193}$: ac proinde juxta poſitiones, quæſiti tres ſunt $\frac{304848.\ 178047.\ 125744}{193}$. Numerus autem, cui debet fieri additio, eſt 72.

PRO

PROBLEMA VIII.

Invenire tres numeros Geometricè proportionales, itaut si ex summâ duorum priorum, aut ex summâ duorum posteriorum, vel ex differentiâ extremorum, tollatur unus & idem cubus, restent quadrato-quadrati.

HAbemus ex Probl. 16. Cap. 2. numeros duos, quorum uterlibet 4160, & 2465, ac summa eorum 6625, si multetur cubo 64, facit quadrato-quadratos 6561. 4096. 2401. Hinc sic efficietur Problema nostrum. Ponatur primus quæsitus 1 N: secundus 4160 -- 1N: tertius 2465 + 1N: sic enim satisfit tribus postulatis, superéstque duntaxat, ut sint Geometricè proportionales: ut autem id fiat, sit productus extremorum 2465N + 1Q æqualis quadrato medii 1Q -- 8320N + 17305600, & fit valor Radicis $\frac{3461120}{2157}$. Igitur tres quæsiti juxta positiones sunt $\frac{3461120.\ 5512000.\ 8778125}{2157}$.

PRO

PROBLEMA IX.

Invenire tres numeros Arithmeticè proportionales, itaut si summa duorum, priorum, & summa duorum posteriorum, nec non differentia extremorum, sigillatim multentur cubo, relinquantur quadrato-quadrati.

RE sumantur tres cossici in præcedenti Problemate assumpti, & primus quidem 1N, secundus 4160 — 1N, tertius verò 2465 + 1N. Ergo summa extremorum 2465 + 2N æquatur duplo medii 8320 — 2N, & fit valor $\frac{5855}{4}$, & juxta positiones, erunt tres quæsiti $\frac{5855.\ 10785.\ 15715}{64}$. Cubus tollendus erit 64.

PRO

PROBLEMA X.

Invenire tres quadratos Harmonicè proportionales, quorum minor ad majorem habeat proportionem majorem quâcunque proportione datâ minoris inæqualitatis.

FAcilè hoc expedietur, ex iis quæ explicata sunt in Probl. 17. Cap. 2. ibi enim ostensum est quomodò inveniri possint duo quadrati, quorum differentia addita majori, faciat quadratum, & simul augeri in infinitum proportio minoris quadrati ad quadratum majorem. Sumantur ergo duo hujusmodi quadrati, putà 25 & 1, & ponantur tres quæsiti 25Q. 1Q. 1. Cùm igitur debeant esse Harmonicè proportionales, erit 25 Q ad 1, ut 24 Q ad 1 Q — 1. Ergo productus sub extremis 25 QQ — 25 Q æqualis erit producto sub mediis 24Q, erúntque 49Q æquales 25QQ. & valor radicis $\frac{7}{5}$, juxta quem si resolvas tres quadratos suprà positos 25 Q. 1 Q. 1. fient

fient in integris 1225. 49. 25.

Sed lubet reperire alios tres, quorum minor ad majorem, habeat proportionem majorem quàm 25 ad 1225. Cape 289 & 49, & ponantur tres quæsiti 289Q. 49Q. 1. Cùm ergo debeant esse Harmonicè proportionales, erit ut 289Q ad 1, sic 240Q ad 49Q -- 1. Igitur productus sub extremis 14161QQ -- 289Q æqualis est producto sub mediis 240Q, & fit valor $\frac{23}{119}$, & juxta positiones, erunt tres quæsiti 152881. 25921. 14161.

Rursùs capiendo 3721 & 2401, pones tres quadratos 3721Q. 2401Q. 1, ac per similem prorsùs operationem, fient tres quadrati 18757561. 12103441. 8934121, quorum tertius ad primum, majorem habet rationem, quàm 14161 ad 152881. Et sic in infinitum.

Quoniam verò utiles sunt ad varia Problemata ejusmodi quadrati Harmonicè proportionales, subjicio plurimos ternarios, quorum primus est: 1225. 49. 25. Secundus, 48841. 14161. 8281. Tertius, 152881. 25921. 14161. Quartus, 600625. 277729. 180625. Quintus, 4036081. 2307361. 1615441. Sextus: 18757561. 12103441.

12103441.8934121. Septimus, 67980025. 47430769.36421225. Octavus, 205951201. 151757761. 120143521.

PROBLEMA XI.

Invenire tres quadratos Harmonicè proportionales, quibus si addantur sigillatim tres numeri Harmonicè proportionales, fiant quadrati.

CApe tres quadratos 1225. 49. 25. Problemate præcedenti repertos: quibus adde 6 N. 3 N. 2 N sigillatim, ità fient 1225 + 6 N. 49 + 3 N. 25 + 2 N æquandi quadratis. Reduc ad eundem quadratum singulos (hoc fiet facillimè ducendo in se duos minores per 49 & 25 reciprocè, hoc est secundum per 25, & tertium per 49) ita enim fient 1225 + 6 N. 1225 + 75 N. 1225 + 98 N, æquandi quadratis: majoris facilitatis gratiâ assumo 1 + 6 N. 1 + 75 N. 1 + 98 N. quadrato æquandos. Horum trium productus solidus est 1 + 179 N + 8388 Q

$+ 8388Q + 44100C$ æquandus quadrato. Finge latus $1 + \frac{179}{2}N + \frac{1512}{8}Q$, & fit valor $\frac{658648}{2223122}$. pro triplicatâ æqualitate $1 + 6N$. $1 + 75N$. $1 + 98N$. Hunc valorem duc in 1225, & fiet valor pro triplicatâ æqualitate $1225 + 6N$. $1225 + 75N$. $1225 + 98N$, atque etiam pro $1225 + 6N$. $49 + 3N$. $25 + 2N$, ac tandem in integris tres quadrati quæsiti Harmonicè proportionales sunt 2796823225. 111872929. 57078025. Si enim primo addas 4841062800; secundo 2420531400; tertio 1613687600 (qui sunt etiam Harmonicè proportionales,) fient quadrati 7637886025. 2532404329, 1670765625, à lateribus 87395. 50323. 40875.

PROBLEMA XII.

Invenire tres quadratos Harmonicè proportionales, quibus si addas tres numeros proportionales Geometricè, fiant quadrati.

SInt tres iidem quadrati Harmonicè proportionales 1225. 49. 25, & tres numeri proportionales Geometricè 9. 6. 4. His jungatur character Radicum, & 1225 + 9N. 49 + 6N. 25 + 4N. æquentur quadratis. Primò reducantur ad eundem quadratum unitatum, ut in præcedenti, & fient 1225 + 9N. 1225 + 130N. 1225 + 196N æquandi quadratis : nec non etiam 1 + 9N. 1 + 130N. 1 + 196N. Horum igitur productus solidus 1 + 335N + 28414Q + 229320C æquetur quadrato. Finge latus 1 + $\frac{335}{2}$N + $\frac{1431}{8}$Q, & fit valor $\frac{10941400}{2047761}$, pro triplicatâ æqualitate posteriori : & pro priori, $\frac{13280715000}{2047761}$. Igitur

tres

tres quadrati Harmonicè proportionales quæsiti sunt 2508507225. 100340289. 5194025 : tres autem numeri Geometricè proportionales sunt 119526435000. 79684290000. 53122860000.

PROBLEMA XIII.

Invenire tres quadratos Harmonicè proportionales, quibus si addantur tres numeri proportionales Arithmeticè, fiant quadrati.

POnantur iidem quadrati 1225. 49. 25, & tres numeri 5. 3. 1. His junge characterem Radicum, ut fiant 1225 + 5 N. 49 + 3 N. 25 + 1 N æquandi quadratis. Iis reductis ad eundem unitatum quadratum, extant 1225 + 5 N. 1225 + 75 N. 1225 + 49 N. nec non 1 + 5 N. 1 + 75 N. 1 + 49N æquandi quadratis. Horum postremorum productus solidus 1 + 129 N + 4295 Q + 18375 C æquetur quadrato, & ad

 hoc

hoc finge latus $1 + \frac{129}{2} N + \frac{539}{8} Q$, fitque valor $\frac{619752}{290521}$ pro hâc triplicatâ æqualitate $1 + 5 N$. $1 + 75 N$. $1 + 49 N$. Hunc valorem duc in 1225, & fiet valor $\frac{759196200}{290521}$, pro triplicatâ æqualitate $1225 + 5 N$. $1225 + 75 N$. $1225 + 49 N$, ac pro primâ omnium $1225 + 5 N$. $49 + 3 N$. $25 + 1 N$. Ergò in integris, tres quadrati Harmonicè proportionales quæsiti erunt 355888225. 14235529. 7263025: numeri autem Arithmeticè proportionales sunt 3795981000 addendus primo quadrato, 2277588600 addendus secundo, & tandem 759196200 addendus tertio.

PRO

PROBLEMA XIV.

Invenire tres quadratos Harmonicè proportionales, quibus si detrahas duos ex tribus Harmonicè proportionalibus, & addas tertium, fiant quadrati.

POnantur quadrati 1225. 49. 25, & numeri 6 N. 4 N. 3 N. Ergo 1225 -- 6 N. 49 -- 4 N. 25 + 3 N. sunt quadrato æquandi. Reducantur illi ad eundem unitatum quadratum, & fient 1225 -- 6 N. 1225 -- 100 N. 1225 + 147 N, aut etiam 1 -- 6 N. 1 -- 100 N. 1 + 147 N. quadrato æquandi. Horum posteriorum solidus productus 1 + 41 N. -- 14982 Q + 88200 C est quadrato æquandus. Finge latus 1 + $\frac{41}{2}$ N -- $\frac{61609}{8}$ Q, & fit valor $\frac{25852552}{3795668881}$ pro ultimâ æqualitate. Hunc valorem duc in 1225, & extabit valor pro aliis duabus triplicatis æqualitatibus. Si hujus secundi valoris ducas denominatorem in 1225. 49. 25, fient tres quadrati Har-

 monicè

monicè proportionales quæsiti 4649694379225. 1859877751 69. 9489172 2025. Si autem ducatur numerator in 6. 4. 3. fient tres numeri Harmonicè proportionales quæsiti: primus quidem 19001 6257200 tollendus à primo quadrato: secundus autem 12667750 4800 tollendus à secundo quadrato: tertius verò 9500812 8600 addendus tertio quadrato, ut fiant quadrati.

PROBLEMA XV.

Invenire tres quadratos Harmonicè proportionales, quibus si partim detrahas, partim addas tres numeros proportionales Geometricè, fiant quadrati.

Sint duo priores numeri 4N & 2N detrahendi sigillatim primo quadrato 1225, & secundo 49: tertius autem 1N sit addendus quadrato 25. Ergo 1225 − 4N. 49 − 2N. 25 + 1N æquabuntur quadratis, & ducendo secundum in. 25, tertium

tertium autem in 49, revocabuntur ad eundem unitatum quadratum 1225 -- 4N. 1225 -- 50N. 1225 + 49 N : erúntque illi tres æquandi quadratis : nec non etiam 1 -- 4N. 1 -- 50N. 1 + 49N. Igitur, ut suprà, horum productus solidus 1 -- 5N -- 2446 Q + 9800 C æquabitur quadrato. Finge latus. 1 -- $\frac{5}{2}$ N -- $\frac{9809}{8}$ Q, & fit valor $\frac{234840}{96216481}$, pro triplicatâ æqualitate postremâ : valor autem pro aliis habetur multiplicando numeratorem in 1225, & est $\frac{287679000}{96216481}$. Igitur in integris tres quadrati Harmonicè proportionales sunt 11 865189225. 4714607569. 2405412025 : numeri autem proportionales Geometricè sunt 1150716000. 575358000. 287679000, quorum primus & secundus subtrahi debent à primo & secundo quadrato sigillatim, tertius autem debet addi tertio quadrato, & fient quadrati:

PROBLEMA XVI.

Invenire tres quadratos Harmonicè proportionales, quibus si detrahantur tres numeri Arithmeticè proportionales, fiant quadrati.

Cape tres quadratos 1225. 49. 25, & tres numeros 3. 2. 1. Ergò 1225 -- 3N, 49 -- 2N. 25 -- 1N. Operare ut suprà, & invenies tandem in integris tres quadratos Harmonicè proportionales 6528025, 261121. 133225, & tres numeros Arithmeticè proportionales 352800. 235200. 117600.

CAPVT IV.

Complectens Problemata singularia, quæ quatuor numeros spectant.

PROBLEMA I.

Invenire quatuor numeros, quorum planoplanus multatus solido sub tribus quibuslibet, relinquat quadratos.

CAPIO primùm aliquem quadratum, qui dividatur in duos quadratos: talis est 400, qui dividitur in 256 & 144: tùm inquiro quatuor numeros, quorum plano-planus sit 400, solidus autem sub primo, secundo, & tertio sit 256, ac solidus sub primo, secundo, & quarto 144. Hoc autem non est difficile, nam diviso 400 sigillatim

gillatim per 256 & 144, duo quotientes ſunt $\frac{25}{16}$ & $\frac{25}{9}$ diviſiſque 256 & 144 per duos iſtos quotientes reciprocè, fient $\frac{2304}{25}$ per alterutram diviſionem: itaque inveniantur duo numeri quorum productus ſit ultimus quotiens procreatus: iſti ſunt 16 & $\frac{144}{25}$. Igitur quatuor numeri 16. $\frac{144}{25}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{25}{16}$ tales ſunt, ut illorum plano-planus æquetur 400, ſolidus verò ſub tribus prioribus ſit 256, ac ſolidus ſub primo, ſecundo, & quarto, 144.

Quare pono quatuor numeros quæſitos ab initio eſſe 16N. $\frac{144}{25}$N. $\frac{25}{9}$. $\frac{25}{16}$, ſic enim fit ſatis duobus poſtulatis infinitè, nam ex illorum plano-plano 400Q ſublatus ſolidus trium priorum 256Q, relinquit 144Q: & ex eodem plano-plano ſublatus ſolidus ex primo, & ſecundo, in quartum 144Q, relinquit 256Q. Supereſt igitur ut ſolidus ſub tribus poſterioribus, & ſolidus ſub primo tertio & quarto detractus eidem plano-plano relinquat quadratum, relinquit autem 400Q -- 25N, & 400Q -- $\frac{625}{9}$N: ſunt ergo illi quadrato æquandi.

Hanc duplicatam æqualitatem ſic reſolves. Cape tres numeros ſequentes 400Q. 400Q -- 25N. 400Q -- $\frac{625}{9}$N. Differentia duorum priorum eſt 25N, & duorum poſterio

ſteriorum $\frac{400}{9}$N : & quidem prior differentia ad poſteriorem , eſt ut 9 ad 16. Igitur invenienda ſunt duo quadrata ejuſmodi, ut eorum intervallum ad intervallum, quo major illorum ſuperatur à 400Q, ſit ut 9 ad 16. Sit latus majoris 20N -- 1, cujus quadratum 400Q -- 40N + 1 ſublatum à 400Q, relinquit 40N -- 1. Fiat ergo ut 9 ad 16, ità 40N -- 1 ad aliud $\frac{640N -- 16}{9}$. Hoc ſublatum à ſuperiori 400Q -- 40N + 1, relinquit $\frac{3600Q. -- 1000N + 25}{9}$ æquanda quadrato ; cùm igitur denominator 9 ſit quadtàtus, ſufficiet æquare numeratorem 3600Q -- 1000N + 25 quadrato. Finge latus 60N -- 16, & fit 1N æqualis $\frac{231}{920}$. Quare ſi fiat ut iſte valor ad 1N, ità 1 ad aliud, erit illud $\frac{920}{231}$N æquale 1 : proindéque latus majoris quadrati 20N -- 1 erit fractio $\frac{3702}{231}$N, cujus quadratum æquandum erit 400Q -- 25N. & fit pro valore $\frac{53361}{306176}$. Ergò juxta poſitiones quatuor numeri quæſiti erunt $\frac{53361}{19136}$. $\frac{480249}{476400}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{25}{16}$.

PRO

PROBLEMA II.

Invenire quatuor numeros, quorum plano-planus additus ſolido ſub tribus quibuſcunque illorum, efficiat quadratos.

CApe aliquem quadratum 100 Q pro plano-plano, cui additi duo 96 Q, & 44 Q, faciant quadratos 196 Q, & 144 Q. Tum divide 100 Q per 96 Q, & 44 Q ſigillatim, ſintque duo quotientes $\frac{25}{24}$ & $\frac{25}{11}$, ſecundus & tertius ex quatuor quæſitis. Horum igitur productus $\frac{625}{264}$ dividens plano-planum 100 Q, dabit productum primi & quarti ex quatuor quæſitis $\frac{1056}{25}$ Q. Quare ſi inveniantur duo numeri, qui hunc producant; erunt illi primus & quartus: ſunt autem innumeri, inter quos eligo 8 N & $\frac{132}{25}$ N. Igitur quatuor quæſiti erunt 8 N. $\frac{25}{24}$. $\frac{25}{11}$. $\frac{132}{25}$ N. & ſatisfit duobus poſtulatis infinitè, reſtátque tantùm ut ſolidus ſub tribus prioribus, itemque ſolidus ſub tribus poſterioribus, additus

tus 100Q, faciat quodratos : facit autem 100Q + $\frac{5000}{264}$N & 100Q + $\frac{3300}{264}$N. Hæc igitur ſunt æquanda quadratis. In iſtâ autem duplicatâ æqualitate per methodum Diophanti, ſumendo terminorum differentiam, invenitur valor $\frac{289}{175296}$. Hic ergo reſolutus juxta poſitiones, dabit quatuor quæſitos $\frac{289}{21912}$. $\frac{25}{24}$. $\frac{25}{11}$. $\frac{19074}{2191200}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

APPENDIX.

Hinc patet, poſſe inveniri quinque numeros, quorum plano-ſolidus multatus plano-plano ſub quatuor quibuſlibet ex illis relinquat quadratos. Ponatur enim plano-ſolidus 64Q, & tria plano-plana 48Q. 28Q. 60Q: ſic enim tollendo ipſa ex 64Q, relinquuntur quadrata 16Q. 36Q. 4Q. Tum divide 64Q ſigillatim per 48Q. 28Q. 60Q, & fiunt $\frac{4}{3}$. $\frac{16}{7}$. $\frac{16}{15}$ pro tribus ex quinque quæſitis. Horum trium productus ſolidus $\frac{1024}{315}$ dividens 64Q dat $\frac{315}{16}$Q pro duorum reliquorum producto. Hunc autem producunt 5N & $\frac{63}{16}$N. Quare 5N. $\frac{4}{3}$. $\frac{16}{7}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{63}{16}$N erunt quinque quæſiti : ſic enim ſatisfit infinitè

tribus

tribus postulatis, superéstque duntaxat ut plano-planus sub quatuor prioribus, & sub quatuor posterioribus, sigillatim detractus 64Q relinquat quadratos: relinquit autem $64Q - \frac{4032}{315}N$ & $64Q - \frac{1024}{63}N$. Igitur hi duo termini sunt quadratis æquandi. Ista verò duplicata æqualitas resolvenda est ex methodo in Problemate primo traditâ, & fient tandem quæsiti $\frac{15376}{11655}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{16}{7}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{961}{925}$. & satisfaciunt quæstioni.

Ad eundem modum invenientur quinque numeri, quorum plano-solidus additus plano-plano cuilibet sub quatuor ex illis faciat quadratos: si enim capiatur 100Q pro plano-solido, & 21Q. 44Q. 96Q. ut per additionem fiant tres quadrati 121Q. 144Q. 196Q, dividendo 100Q per 21Q. 44Q. 96Q sigillatim, fient tres ex quinque quæsitis. Horum trium solidus dividens 100Q, dabit productum sub duobus aliis. Quare si capiantur duo numeri hunc productum producentes, habebis quinque numeros quæsitos, qui satisfacient infinitè tribus postulatis, restabitque tantùm ut satisfiat duobus aliis, quod præstabitur facilè, ut factum est in Proble

Problemate secundo Hujus Capitis.

Immò non tantùm quinque numeri reperientur, sed etiam quotcunque quis voluerit: quare ad alia properanti, non est in istis diutiùs immorandum.

PROBLEMA III.

Invenire quatuor numeros proportionales in datâ ratione, quorum plano-planus multatus solido sub tribus quibuscunque ex illis, relinquat quadratos.

DEtur ratio 5 ad 21, & quærantur duo numeri in datâ ratione, qui subtracti ab aliquo quadrato ad libitum sumpto relinquat quadratos: sintque duo illi numeri 5N & 21N, quadratus autem ad libitum sumptus sit 4. Igitur 4 -- 5N & 4 -- 21N æquantur quadratis. Hanc duplicatam æqualitatem solves, capiendo tres numeros sequentes 4, 4 -- 5N. 4 -- 21N. Tum Radicis 2 -- 1N capies quadratum 4 -- 4N + 1Q, quem tolles à 4, residuum est 4N -- 1Q. Fiat ergo ut 5N differentia duorum

duorum priorum, ad 16N differentiam duorum posteriorum, ità 4N -- 1Q ad aliud, nempè $\frac{64N -- 16Q}{5}$. quod tollatur à quadrato prædicto 4 -- 4N + 1Q, & fit residuum $\frac{20 -- 84N + 21Q}{5}$ æquandum quadrato. Finge latus 2 -- 5N : ejus quadratus 4 --20N + 25Q æquatum priori, dabit valorem $\frac{2}{13}$: ac proinde latus suprà positum 2 -- 1N erit $\frac{24}{13}$, cujus quadratum æquatum 4 -- 5N, dat $\frac{20}{169}$ pro primis positionibus. Hunc si ducas in 5 & 21 exhibebuntur duo numeri quæsiti, $\frac{100}{169}$ & $\frac{420}{169}$, qui sublati ex 4, relinquent quadratos. Per hos igitur numeros divides 4, & fient duo priores quæsiti $\frac{169}{25}$ & $\frac{169}{105}$. Duo autem posteriores erunt 21N & 5N. Hi quatuor numeri tales sunt, ut eorum plano-planus $\frac{28561}{25}$Q multatus solido sub primo, tertio, & quarto, itémque solido sub secundo, tertio, & quarto, relinquat duos quadratos $\frac{10816}{25}$Q & $\frac{24336}{25}$Q infinitè. Quare superest ut idem plano-planus multatus solido primi, secundi, & tertii, itémque solido primi, secundi, & quarti relinquat quadratos : relinquit autem $\frac{28551}{25}$Q -- $\frac{142805}{2625}$, & $\frac{28561}{25}$Q -- $\frac{599771}{2625}$N. Illi ergo sunt æquandi quadrato.

Hæc

Hæc duplicata æqualitas ſic reſolvetur. Cape tres numeros ſequentes $\frac{28561}{25}Q$. $\frac{28561}{25}Q - \frac{142805}{2625}N$. $\frac{28561}{25}Q - \frac{599772}{2625}N$. Differentia duorum priorum eſt $\frac{142805}{2625}N$. Differentia verò duorum poſteriorum $\frac{456976}{2625}N$: qui ſunt in ratione 5 ad 16. Cùm ergò medius ex tribus ſit $\frac{28561}{25}Q - \frac{142805}{2625}N$, finges latus ejus $\frac{169}{5}N - 1$ & ejus quadratum ſublatum à primo ex tribus aſſumptis, dabit differentiam $\frac{1690N - 25}{25}$, quæ ad differentiam duorum minorum erit ut 5 ad 16. Igitur differentia duorum minorum erit $\frac{5408N - 80}{25}$, quæ detracta ex quadrato medio, cujus ſuprà poſitum eſt latus $\frac{169N - 1}{5}$, relinquit $\frac{28561Q - 7098N + 105}{25}$ æquandum quadrato. Finge latus $\frac{169N - 22}{5}$, & fiet valor $\frac{379}{338}$. Igitur latus poſitum $\frac{169}{5}N - 1$ æquatur $\frac{62361}{1895}N$, cujus quadratum medio ex tribus ſuperioribus $\frac{28561}{25}Q - \frac{142805}{2625}N$ æquatum, dat valorem pro primis poſitionibus $\frac{4102530601}{4486361880}$. Igitur juxta poſitiones, quatuor quæſiti ſunt $\frac{169}{25}$. $\frac{169}{105}$. $\frac{86153142621}{4486361880}$. $\frac{4102530601}{857272376}$.

PROBLEMA IV.

Invenire quatuor numeros proportionales in ratione datâ, quorum plano-planus additus solido sub tribus quibuscunque, faciat quadratum.

ESto data ratio 11 ad 24, & inveniatur quadratus, cui addendo duos numeros in ratione datâ, fiant quadrati: talis est 100, nam addendo ipsi 44 & 96 (sunt illi in ratione 11 ad 24) fiunt 144 & 196, quadrati à lateribus 12 & 14. Quarè diviso 100 per 96 & 44, fient duo priores quæsiti $\frac{25}{24}$ & $\frac{25}{11}$. Pones igitur $\frac{22}{5}$N & $\frac{48}{5}$N pro duobus posterioribus: sic enim sunt proportionales, & solidus sub primo, tertio, & quarto, vel sub secundo, tertio, & quarto, additus plano-plano illorum quatuor, facit quadratum. Superest igitur ut solidus sub primo, secundo, & tertio, vel sub primo, secundo, & quarto, additus eidem plano-plano, qui est 100Q, faciat quadratos. Facit autem 100Q + $\frac{3000}{132}$N &

& 100 Q + $\frac{2375}{132}$ N. Igitur illi ſunt quadrato æquandi, & fit valor $\frac{1859}{325248}$, & juxta poſitiones quatuor quæſiti $\frac{25}{24}$. $\frac{25}{11}$. $\frac{40898}{1626240}$. $\frac{89232}{1626240}$.

PROBLEMA V.

Invenire quatuor numeros proportionales in rationalibus, & in integris, qui ſint ejuſmodi, ut ſi primus fuerit multatus aliquo cubo A, quadratum reliqui unà cum alio quopiam quadrato ipſius B, faciat quadratum ſecundi: ſi verò tertius fuerit auctus eodem cubo A, quadratum ſummæ factæ cum quadrato B, faciat quadratum quarti. Volo autem quadratos ipſorum A & B facere quadratum.

ESto A 3, & B 4, ut eorum quadrata faciant quadratum: & quæratur numerus, qui aſſumens 3, faciat ſummam, cujus quadratum cum quadrato B, faciat qua-

dratum: Sitque ille 1 N. Ergò 1 N + 3 debet habere quadratum 1 Q + 6 N + 9, qui cum 16 faciat quadratum 1 Q + 6 N + 25. Ille æquetur quadrato, & finge latus 1 N + $\frac{10}{3}$, fitque valor $\frac{125}{6}$: cujus numeratorem si ducas in denominatorem, fiet tertius quæsitus in integris 750. Si autem 3 & 4 ducantur in quadratum denominatoris 36, existent duo A & B in integris 108 & 144, & fiet quartus quæsitus, juxta tenorem quæstionis 870 in integris. Quoniam verò debent esse proportionales, & habentur tertius 750, & quartus 870, ponantur primus 750N, & secundus 870 N, ac primus quidem multatus A seu 108, erit 750 N -- 108: cujus quadratum 562500 Q -- 162000 N + 11664 junctum quadrato B, qui est 20736, dabit summam 562500 Q -- 162000 N + 32400 æquandam 756900 Q (quadrato secundi,) & fit valor $\frac{1}{6}$, qui resolutus juxta positiones, dat primum 125, & secundum 145. Quare 125. 145. 750. 870. erunt quatuor proportionales, A existente 108, & B 144, quibus omnia postulata competunt, nisi quòd A non est cubus. Igitur si illi omnes ducantur

ducantur in quadratum A, qui eſt 11664, fient qui ab initio poſtulantur proportionales, 1458000. 1691280. 8748000, 10147680. A exiſtente cubo 1259712, & B quadrato 1679616.

A P P E N D I X.

Hoc Problema propoſuit mihi anno 1670. *D. Ozanam* vir acerrimæ indaginis, ejúſque mihi declaravit utilitatem ad inveniendum triangulum quodvis in rationalibus, ut numerus lineæ unum angulum bifariam ſecantis, nec ſecùs etiam perpendicularis ab eodem angulo in latus oppoſitum cadentis, ſit rationalis. Et hoc quidem aliter quàm fecerit Bachetus in ſuis ſuper Diophantum commentariis, Lib. 6. Quæſt. 18. ſub finem, ubi perpendicularem nullo modo fecit rationalem. Ex inventis enim quatuor Numeris 125, 145, 750, 870, primus & minor 125 erit ſegmentum minus baſis factum à biſſecante, tertius 750 erit alterum ſegmentum, unde ipſa baſis erit 875. Secundus 145 erit latus minus: quartus autem 870 erit tertium latus. Numerus A, 108 erit portio baſis inter biſſe-

 can

cantem & perpendicularem, & numerus 144 erit ipſa perpendicularis, cujus quadratum 20736 additum Numeri A 108 quadrato 11664, dabit numerum quadratum 32400, cujus radix quadrata 180 lineam biſſecantem exhibebit. Et patet demonſtratio ex 3. 6. Euclidis.

Huic Problemati affinis eſt quæſtio ſequens, quam idem *D. Ozanam* mihi paulò pòſt ſolvendam propoſuit. *Invenire quatuor Numeros, ut ſi à quadrato primi auferatur quadratum tertii, & à quadrato ſecundi quadratum quarti, reſtet idem quadratus, qui cum quadrato dimidiæ tertii & quarti differentiæ faciat quadratum.*

Ponatur primus 5, ſecundus ℞ (25 + 12N + 4Q) tertius 3, & quartus 3 + 2N: ſic enim ſatisfit infinitè duobus poſtulatis, reſtátq; tantùm ut 25 + 12N + 4Q & 16 + 1Q, æquentur quadratis. Hinc verò fit valor $\frac{3830400}{1280799}$, & quatuor Numeri quæſiti erunt in integris 6403995, 12592485, 3842397, 11503197.

Hinc etiam elicitur modus haud injucundus, inveniendi triangulum quodvis in rationalibus, ut ab uno angulo ducta linea dividens baſim bifariam, atque etiam perpendicularis,

pendicularis, sit rationalis. Et quidem alius ab eo, qui traditur à Bacheto ibidem, ubi etiam perpendicularem non curavit facere rationalem. Inventorum enim Numerorum tertius & minor 3842397 erit segmentum minus basis factum à perpendiculari, & quartus 11503197 erit segmentum majus, unde basis erit 15345594. Primus 6403995 erit latus minus, cujus quadratum 41011151960025 dempto segmenti minoris 3842397 quadrato 14764014705609, dabit quadratum 26247137254416, cujus quadrata radix 5123196 erit perpendicularis. Denique secundus 12592485 erit tertium latus, cujus quadratum 158570678475225 detracto segmēti majoris 11503197 quadrato 132323541220809, dabit quadratum idem perpendicularis, nempé 26247137254416, quod additum numeri 3830400 (est portio basis inter perpendicularem & bissecantem, seu dimidia differentia segmentorum) quadrato 14671964160000, dabit quadratum 40919101414416, cujus quadrata radix 6396804 lineam bissecantem manifestabit.

PROBLEMA VI.

Invenire quatuor numeros æquales quadrato, & tales, ut duo extremi, & duo quilibet proximi diſtent cubis inter ſe diverſis.

PEtii cubos inter ſe diverſos, quia ſine hâc conditione, res foret facillima, nam ſolveretur quæſtio per quatuor ſequentes numeros $\frac{6.\ 14.\ 13.\ 5}{54872}$.

Si autem poſtulentur cubi diuerſi, praxis erit paulò laborioſior; & efficietur hoc modo. Cape duos quoſvis numeros, & duc majorem in ſuum cubum auctum duplo minoris cubi, fiétque latus cubi cujuſdam æqualis tribus cubis. Rursùs duc eundem majorem numerum in intervallum cuborum, itémque duc minorem numerum tùm in duplum majoris cubi auctum cubo minore, tùm in cuborum differentiam, & fient latera trium cuborum, quibus prior eſt æqualis. Vnde ſi juxta hæc præcepta capias 3, & 2, invenies cubum 1146689 æqualem

æqualem tribus cubis ſequentibus 1906624. 185193. 54872.

His poſitis, venio ad primariam quæſtionem, & pono primum quæſitum eſſe ſummam ex 1906624 & quolibet ex iis qui ſunt inter primum ex tribus (modò differentia illius & ſecundi ex tribus ſuperet tertium) ſit verbi gratiâ 1000000 (potuit capi 906624 vel 806624 vel 702489, unde patet via ad infinitas ſolutiones.) Eſto igitur primus 2906624, ſecundus autem 1000000, tertius 100000 -- 185193 ſeu 814807, quartus denique 814807 -- 54872 ſeu 759935. Deinde hos quatuor afficio charactere cuborum, ut ſint quæſiti 2906624C. 1000000C. 814807C. 759935C. & illorum ſummam 5481366C æqualem facio cuilibet quadrato (hinc rursùs manifeſtum eſt infinitas exhiberi poſſe ſolutiones,) putà 1 Q, & fit valor $\frac{1}{5481366}$, cujus cubum ſi ducas in quatuor poſitiones, fient quatuor quæſiti $\frac{2906624.\ 1000000.\ 814807.\ 759933}{164687687258075535896}$.

CAPVT V.

Complectens Problemata singularia, in quibus occurrunt numeri surdi.

PROBLEMA I.

Dividere numerum datum in tres Geometricè proportionales, itaut duorum priorum productus æquetur differentiæ quadratorum à duobus prioribus : & duorum posteriorum productus æquetur quoque differentiæ quadratorum à duobus posterioribus.

AD enodationem istius Problematis, suppono id quod tàm in Geometricis, quàm in Arithmeticis certum est, nempè segmenta cujuscunque quan

quantitatis secundùm mediam & extremam rationem sectæ, talia esse, ut productus illorum æquetur differentiæ quadratorum ab illis. Sit ergo numerus dividendus 4 (aut quilibet alius,) secetúrque bifariàm, & media ejus pars 2 secetur mediâ & extremâ ratione, in ℞5 -- 1 & 3 -- ℞5, ità enim habebuntur tres partes quæsitæ 2. ℞5--1. 3--℞5.

Duobus autem modis quilibet numerus, putà 2, secabitur mediâ & extremâ ratione: primò algebricè, ponatur enim major pars 1N, ergo minor erit 2 -- 1N. Igitur quadratus medii 1Q æquatur producto sub extremis 4 -- 2N, & fit valor ℞5 -- 1, quo subtracto ex 2, habetur minor 3--℞5. Secundò canonicé, nam si quadratus numeri dati addatur quadrato dimidii numeri dati, summæ radix quadrata multata eodem dimidio, exhibet majus segmentum, quod si tollatur de numero dato, restat segmentum minus.

PRO

PROBLEMA II.

Dividere numerum datum in quatuor continuè proportionales, itaut duorum priorum productus, vel duorum mediorum, aut duorum posteriorum, æquetur differentiæ quadratorum ab illis: & quadrata extremorum dupla sint quadratorum à mediis.

ESto numerus dividendus 20, & ponatur 1N pro majore extremo, & 20 -- 2N pro extremo minore, summa autem mediorum sit 1N, ità enim quatuor numeri æquabuntur 20. Ergò productus sub exteremis erit 20N -- 2Q. Sed in serie 4 continuè proportionalium, si cubus summæ mediorum dividatur per summam extremorum plus triplâ mediorum summâ, habetur etiàm productus extremorum vel mediorum; igitur $\frac{1C}{20 -- 2N}$ æquatur 20N -- 2Q, & post debitam metathesim, ac divisionem, fit valor ℞ 80 pro majore

majore extremo, atque etiàm pro summâ mediorum, & 20 -- ℞320 pro extremo minore. Deinde ℞80 (per canonem Problematis præcedentis) divides in duos secundùm mediam & extremam rationem: erunt duo segmenta 10 -- ℞20 & ℞180 -- 10, & ità quatuor quæsiti sunt ℞80. 10--℞20. ℞180--10. 20--℞320.

PROBLEMA III.

Dividere numerum datum in quinque continuè proportionales, itaut productus duorum quorumlibet proximorum æquetur differentiæ quadratorum ab illis: atque insuper quadrata primi & quarti dupla sint quadratorum secundi & tertii: itémque quadrata secundi & quinti dupla quadratorum tertii & quarti.

SIt numerus dividendus 44: quilibet autem numerus, putà 2 dividatur mediâ & extremâ ratione in ℞5 -- 1 & 3 -- ℞5. Harum

Harum apotomarum binomia sunt ℞5 + 1 & 3 + ℞5. Habes ergo quinque numeros ℞5 + 1. 3 + ℞5. 2. ℞5 -- 1. 3 -- ℞5, cum requisitis conditionibus. Fiat nunc, ut summa eorum quinque 8 + ℞ 20 ad singulos, ita numerus dividendus 44 ad alios, & habebis quæsitos 14 + ℞ 20. ℞180 -- 2. 16 -- ℞80. ℞500 -- 18. 34 -- ℞980.

Aliter. Quinque priùs inventos afficies charactere Radicum, ut sint numeri quæsiti 3N + ℞5Q. ℞5Q + 1N. 2N. ℞5Q -- 1N. 3N -- ℞5Q. Igitur summa eorum 8N + ℞20Q æquatur 44 numero dividendo, & fit valor $\frac{44}{8 + ℞20}$. Hæc verò fractio æqualis est 8 -- ℞20. Iuxta hunc valorem si resolvas cossicos superiores, extabunt quæsiti quinque, quos jam suprà dedimus.

APPENDIX.

Eâdem prorsùs arte dividetur numerus datus in quotlibet cum iisdem conditionibus: quamvis enim longior sit operatio de 100 segmentis, quam de quinque, non est tamen difficilior.

PRO

PROBLEMA IV.

Invenire duos numeros, quorum differentia, productus, & intervallum quadratorum, sint æqualia.

POnantur duo quæsiti $\frac{1}{2}$ + 1N & $\frac{1}{2}$ -- 1N, sic enim tùm differentia numerorum, tum intervallum quadratorum est 2N. Restat igitur ut productus eorum $\frac{1}{4}$ -- 1Q æquetur 2N, & fit valor ℞ $\frac{5}{4}$ -- 1. Vnde juxta positiones, duo quæsiti erunt ℞ $\frac{5}{4}$ -- $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{2}$ -- ℞ $\frac{5}{4}$. Quod probatur, quia ℞ 5 -- 2 est eorum differentia, & productus, & intervallum quadratorum.

PRO

PROBLEMA V.

Invenire duos numeros, quorum summa, productus, & differentia quadratorum sint æqualia.

POnantur illi duo 1N & 1N + 1, sic enim eorum summa æquatur differentiæ quadratorum infinitè (quia numeri differunt unitate.) Supereſt igitur ut productus eorum 1Q + 1N æquetur 2N + 1, & fit valor ℞ $\frac{5}{4}$ + $\frac{1}{2}$ pro primo quæſito, & ℞ $\frac{5}{4}$ + $\frac{3}{2}$ pro ſecundo: nam ℞ 5 + 2 æquatur eorum ſummæ, & producto, & intervallo quadratorum.

PRO

PROBLEMA VI.

Invenire duos numeros, itaut productus solidus ex eorum differentiâ in quadratum majoris, æquetur producto solido ex eorum summâ in quadratum minoris.

POnatur primus quilibet, putà 3, & secundus seu minor duorum quæsitorum sit 1N. Igitur horum differentia 3 -- 1N ducta in quadratum majoris 9, facit 27 -- 9N æqualem 3Q + 1C (productus est solidus ex summâ numerorum 3 + 1N in quadratum minoris 1Q.) Et post debitam metathesim, fit 27 æqualis 9N + 3Q + 1C.

Ista autem æquatio sic reducitur ad terminos simpliciores. Triplum quadratum trientis numeri Quadratorum 3, aufer de numero Radicum 9, & fit 6, pro coëfficiente Radicum in secundâ æquatione. Quare 1C + 6N æquatur cuidam homogeneo, qui sic invenietur. Residuum mox

inventum 6 duc in ſupradictum trientem numeri quadratorum 1, & fit 6, cui adde cubum ejuſdem trientis, & habetur 7. Hanc ſummam adde homogeneo 27, & fit 34, ergò 1C + 6N æqualis 34.

In hâc verò poſteriori æquatione ſic reperitur valor Radicis, cubum trientis numeri Radicum 8, adde quadrato dimidii homogenei 289, & fit ſumma 297, cujus radix quadrata addita eidem dimidio, dat ℞ 297 + 17. Hujus radix cubica multata radice cubicâ apotomes, dat valorem pro ſecundâ æquatione ℞ cub. (℞ 297 + 17) -- ℞ cub. (℞ 297 -- 17 :) unde ſi auferas trientem ſupradictum numeri quadratorum 1, fiet valor in primâ æquatione, & duo numeri quæſiti 3, & ℞ cub. (℞ 297 + 17) -- ℞ cub. (℞ 297 -- 17) -- 1.

PRO

PROBLEMA VII.

Invenire tres numeros Geometricè proportionales, quorum tres differentiæ sint proportionales Harmonicè.

QVærendi ſunt primùm tres numeri Harmonicè proportionales, quorum duo minores æquentur majori, ſiquidem trium numerorum continuò creſcentium aut decreſcentium differentia inter extremos æquatur ſummæ differentiarum medii ab extremis. Ponatur ergo minor 1, medius 1N, & major 1 ⊹ 1N: ità enim major æquatur duobus minoribus. Reſtat igitur ut ſint Harmonicè proportionales: erunt autem iſtiuſmodi, ſi ſit ut major 1 ⊹ 1N ad minorem 1, ſic differentia duorum majorum 1, ad differentiam duorum minorum 1N -- 1. Ergo iſtorum quatuor productus ſub extremis 1Q -- 1 æquatur producto ſub mediis 1: & ſit valor ℞2. & tres quæſiti 1. ℞2. 1 ⊹ ℞2.

Ad primariam igitur quæſtionem po-

 natur

natur primus ex quæsitis 1N. Ergò secundus erit 1N + 1 (numerus absolutus est primus ex tribus inventis.) Huic adde secundum inventum ℞2, & fiet tertius ex quæsitis 1 + 1N + ℞2. Sunt igitur trium illorum numerorum tres differentiæ Harmonicè proportionales: quare restat ut numeri ipsi sint proportionales Geometricè. Erunt autem tales, si productus extremorum 1Q + 1N + ℞2Q æquetur quadrato medii 1Q + 2N + 1. Demantur utrinque æqualia, restabítque 1 + 1N æqualis ℞2Q, & fit 1N æqualis ℞2 + 1, & juxta positiones, erunt tres quæsiti ℞2 + 1. ℞2 + 2. ℞8 + 2.

PROBLEMA VIII.

Invenire tres numeros Harmonicè proportionales, quorum differentiæ sint proportionales Geometricè.

QVæro primùm tres numeros Geometricè proportionales, quorum duo minores æquentur majori (ob rationem explicatam

plicatam in Problemate præcedenti :) atque ut vitentur fractiones, pono minorem esse 2, medium 2N, ergo tertius erit 2Q, proindéque 2 + 2N æquabuntur 2Q. Igitur valor duarum Radicum est ℞5 + 1, & tres Geometricè proportionales quæsiti erunt 2. ℞5 + 1. ℞5 + 3.

Ad primariam igitur quæstionem, pono minorem 1N, & medium 1N + 2, & majorem 1N + 3 + ℞5 (addendo videlicèt minori primum ex inventis 2, & medio secundum ex inventis ℞5 + 1.) Igitur illi tres habent differentias, quales poscuntur : quarè restat ut numeri sint Harmonicè proportionales : ad hoc autem satis est, si sit primus 1N ad tertium 1N + 3 + ℞5, sicut differentia primi & secundi 2, ad differentiam secundi & tertii 1 + ℞5. Hoc verò posito, erit productus sub extremis 1N + ℞5Q æqualis producto sub mediis 2N + 6 + ℞20, & demptis æqualibus utrinque, ℞5Q æquabitur 1N + 6 + ℞20. Ergò erunt æqualia eorum quadrata 5Q & 1Q + 12N + ℞80Q + ℞2880 + 56 : factáque reductione, erunt 4Q æqualia 12N + ℞80Q + ℞2880 + 56. Hìc sisto, ut eruam

Radicem more Diophanti, sine fractionibus. Duco igitur numerum Quadratorum 4 in numerum Vnitatum ℞2880 + 56, & fit ℞46040 + 224: hunc productum addo quadrato dimidii numeri Radicum, quod est 56 + ℞2880 (nam 12 N + ℞ 80 Q tenent locum numeri Radicum:) summa est 280 + ℞72000, hujus radix quadrata 10 + ℞180, addita dimidio numero Radicum 6 + ℞20, facit ℞320 + 16. Summam hanc divide per numerum quadratorum 4, & fit valor Radicis ℞20 + 4. Quarè juxta positiones, numeri quæsiti ab initio sunt ℞20 + 4. ℞20 + 6. 7 + ℞45.

PROBLEMA IX.

Invenire tres numeros, itaut productus ex primo in secundum sit duplus tertii, productus ex secundo in tertium sit triplus primi, & productus ex tertio in primum sit quadruplus secundi.

ANte omnia, quærendi sunt tres, qui satisfaciant duobus postulatis: ponendo

do primum, ut libuerit, putà 4, secundum autem 1N, ergò quoniam productus primi in secundum debet esse duplus tertii, erit tertius 2N : at productus ex secundo in tertium erit 2Q, qui debet esse triplus primi 4. Igitur triplum ipsius 4, nempè 12, æquatur 2Q, & fit valor ℞ 6. Itaque isti tres satisfaciunt duobus postulatis 4. ℞6. ℞24.

Iam igitur ad primariam quæstionem, pono tres quæsitos esse 4N. ℞6. ℞24Q, qui satisfaciunt duobus postulatis infinitè: nam productus ex primo in secundum, facit ℞96Q, qui est duplus secundi ℞24Q: deinde productus ex secundo in tertium facit ℞144Q, seu 12N, triplum primi 4N. Restat igitur ut productus tertii in primum ℞384QQ æquetur ℞96 (quadruplum est secundi,) & fit valor ℞$\frac{1}{4}$. Ergò juxta positiones, tres quæsiti sunt ℞8. ℞6. ℞12.

PROBLEMA X.

Invenire tres numeros, quorum summa sit cubus rationalis, itaut summa duorum priorum ex illis tribus, æquetur summæ quadratorum ab illis ortorum: & differentia duorum posteriorum ex illis æquetur differentiæ quadratorum suorum.

Eligatur quicunque cubus minor binario, qualis est $\frac{125}{64}$. Ex eo tollatur 1, & residuum $\frac{61}{64}$ assumatur pro primo quæsito. Secundus sit $\frac{1}{2}$ -- 1 N. Tertius autem $\frac{1}{2}$ + 1 N. Ac primùm quidem certum est, summam illorùm æquari cubo rationali $\frac{125}{64}$. Deinde duorum posteriorum differentia est 2 N, æqualis differentiæ quadratorum ab illis. Superest igitur, ut summa duorum priorum $\frac{93}{64}$ -- 1 N æquetur summæ quadratorum ab illis $\frac{4745}{4096}$ -- 1 N + 1 Q, & fit valor ℞ $\frac{1207}{4096}$, & tres quæsiti $\frac{61}{64}$. $\frac{1}{2}$ -- ℞ $\frac{1207}{4096}$. $\frac{1}{2}$ + ℞ $\frac{1207}{4096}$. Quod dictum

ctum est de cubo, dici potest de quadratoquadrato, de sursolido, & de quâcunque aliâ potestate.

PROBLEMA XI.

Invenire tres numeros Harmonicè proportionales, itaut minoris quadratum æquetur duobus aliis numeris, & major illorum duobus aliis rursùs æquetur.

Ponantur tres quæsiti 1. ℞ 2. 1 + ℞ 2. (eos suprà reperimus Probl. 7.) Illis nectatur character Radicum 1 N. ℞ 2 Q. 1 N + ℞ 2 Q. ità enim erunt adhuc Harmonicè proportionales, & major æquabitur duobus aliis. Quare restat ut quadratum minoris 1 Q sit æquale ℞ 8 Q + 1 N (summa est secundi & tertii,) & fit valor ℞ 8 + 1. Igitur juxta positiones, tres quæsiti sunt ℞ 8 + 1. 4 + ℞ 2. ℞ 18 + 5.

PROBLEMA XII.

Invenire tres numeros Geometricè proportionales, itaut quadratum minoris æquetur majori & medio: major autem æquetur duobus aliis.

SVmantur in Probl. 8. Capitis hujus, tres Geometricè proportionales 2. ℞ 5 + 1. ℞ 5 + 3, quorum major æquetur summæ duorum aliorum. Hi omnes afficiantur charactere Radicis, & ponantur pro tribus quæsitis 2 N. ℞ 5 Q + 1 N. ℞ 5 Q + 3 N. Ergò quadratum minoris 4 Q æquatur summæ aliorum ℞ 20 Q + 4 N, & fit valor ℞ $\frac{5}{4}$ + 1, & tres quæsiti, juxta positiones, erunt ℞ 5 + 2. ℞ $\frac{45}{4}$ + $\frac{7}{2}$. ℞ $\frac{125}{4}$ + $\frac{11}{2}$.

EPILO-

EPILOGVS
SEV
ANALYSIS SPECIOSA
AD ENODATIONEM
Problematum.

QVAM ingenioſa ſit iſta analyſis, & quàm neceſſaria ad ſolutionem quarumcunque quæſtionum, nôrunt omnes qui in eâ comparandâ, aliquam operam poſuerunt. Poſſem ergo id in omnibus Problematibus ſuprà explicatis demonſtrare, ſed cùm hîc compendio ſtudeam, aliquot tantùm aggrediar, ex quibus facile erit ad alia progredi, imò & nova invenire, & viam ſibi per ſaxoſa & abrupta quæque facere. Vno verbo

verbo hinc patebit methodus tenenda ad solutionem difficillimorum quorumcunque Problematum.

EXEMPLVM I.

Quæsivimus in primâ Parte, quomodò inveniendum sit triangulum rectangulum, in quo dupla area ex singulis lateribus subtracta, relinquat quadratos.

Res ista hoc exposita modo, valdè obscura videtur, ac veluti spissis obvoluta tenebris. Illas ut dissipes, ac lucem afferas, utere Analysi Speciosa, & pone y pro hypotenusâ trianguli speciei, b autem & d pro lateribus circa rectum: hæc latera si dividas per a, fiet triangulum quæsitum $\frac{y}{a}$. $\frac{b}{a}$. $\frac{d}{a}$. & dupla area $\frac{bd}{aa}$. Igitur juxta quæstionis tenorem $\frac{y}{a} - \frac{bd}{aa}$. $\frac{b}{a} - \frac{bd}{aa}$. $\frac{d}{a} - \frac{bd}{aa}$. æquabuntur quadratis: & reductis illis ad eundem denominatorem $\frac{ya - bd}{aa}$. $\frac{ba - bd}{aa}$. $\frac{da - bd}{aa}$. rursùs æquabuntur quadratis: Et quoniam denominator communis quadratus

tus est à latere a, sequitur numeratores quadratis esse æquandos, nempè $ya - bd$. $ba - bd$. $da - bd$. Sumantur primùm duo termini priores $ya - bd$ & $ba - bd$. ac postremus $ba - bd$ æquetur quadrato zz ad libitum sumpto. Igitur per metathesim ba æquatur $zz + bd$, & divisâ utrâque æquationis parte per b, fit a æqualis quotienti $\frac{zz + bd}{b}$. Hinc pergo ad priorem terminum $ya - bd$, & quia in primâ illius particulâ reperitur ya, multiplico y non jam ampliùs per a, sed per ejus valorem inventum, ut fiat $\frac{yzz + ybd}{b}$, unde tollo bd, ut postulat secunda particula ejusdem termini prioris: reductísque omnibus ad eandem denominationem, fit istud residuum $\frac{yzz + ybd - bbd}{b}$. ductóque tam numeratore, quàm denominatore in b, ut maneat fractio eadem, extat $\frac{yzzb + ybbd - bbbd}{bb}$ æquandus quadrato, & quia denominator est quadratus à latere b, erit solus numerator $yzzb + ybbd - bbbd$ quadrato æquandus. Quoniam autem suprà positus est quadratus zz ad libitum, substituatur ei quadratus bb, & erit $ybbb + ybbd - bbbd$ æquandus quadtato: divisísque omnibus per bb, extabit $yb + yd - bd$

quadrato

quadrato æquandus. Vnde jam inferri potest, *multiplicandam esse hypotenusam per summam laterum circa rectum, & inde auferendum duplum areæ, ac residuum æquandum quadrato.*

Sed hoc adhuc clariùs constabit, si capias duos terminos extremos $ya - bd$ & $da - bd$. Siquidem si $da - bd$ æques quadrato zz pro arbitratu sumpto, erit per metathesim $zz + bd$ æqualis da, & dividendo utramque æquationis partem per d, fiet a æqualis $\frac{zz + bd}{d}$. Quare pergo ad priorem terminum $ya - bd$, & considero in eo primam particulam ya, & duco y non ampliùs in a, sed in ejus valorem mox inventum, ut fiat $\frac{yzz + ybd}{d}$, unde tollo bd, & post reductionem fit $\frac{yzz + ybd - bdd}{d}$ æquandus quadrato. Duc tam numeratorem quàm denominatorem in d, habebísque $\frac{yzzd + ybdd - bddd}{dd}$ quadrato æquandum; & quia denominator est quadratus, sufficiet æquare quadrato numeratorem $yzzd + ybdd - bddd$. Loco zz quadrati ad libitum sumpti substitue dd, extabit $yddd + ybdd - bddd$ æquandus quadrato: & divisis omnibus per dd, erit $yd + yb - bd$ quadrato æquandus. Est

autem

autem $yd + yb$ idem quod productus ex y in $d + b$. Igitur cùm y sit hypotenusa, & bd dupla area, infertur rursùs ad enodationem quæstionis propositæ, *ducendam esse hypotenusam in summam laterum circa rectum & ex eo producto tollendum esse duplum areæ, ac residuum quadrato æquandum.* Hoc autem effectum est in Problemate primo, Capitis primi, Partis prioris.

EXEMPLUM II.

Sit jam inveniendum triangulum rectangulum, in quo areâ duplâ hypotenusæ additâ, & duobus lateribus circa rectum detractâ, fiant quadrati.

OMnia fiant ut in principio prioris exempli, & invenietur idem valor a, nempè $\frac{zz + bd}{b}$. Sed quoniam alter terminus est $ya + bd$, ubi non est signum -- sed +, ductâ hypotenusâ y in valorem a, fit $\frac{yzz + ybd}{b}$, cui addendus est bd, sic enim post reductionem ad eundem denominatorem, extabit summa $\frac{yzz + ybd + bbd}{b}$

&

& ducto tùm numeratore tùm denominatore in b, fiet productus $\frac{yzzb + ybbd + bbbd}{bb}$ æquandus quadrato. Quoniam verò denominator est quadratus à latere b, sufficiet æquare quadrato numeratorem $yzzb + ybbd + bbbd$. Quia verò zz quadratum sumptum est pro libito, substituatur bb loco illius, & fiat $ybbb + ybbd + bbbd$ quadrato æquandus: & divisis omnibus per bb; restabit $yb + yd + bd$ æquandus quadrato. Hinc jam infertur ad enodationem Problematis, *quærendum esse triangulum rectangulum, in quo hypotenusa ducatur in summam laterum minorum, & producto huic addendo duplam aream, fiat quadratus.*

Sed illud idem inferetur ex alio termino cum priori comparato. Sint enim $ya + bd$ & $da - bd$ quadrato æquanda: & capiatur secundus terminus $da - bd$ æquandus quadrato zz. Igitur per metathesim $zz + bd$ æqualis erit da: & dividendo omnia per d, erit $\frac{zz + bd}{d}$ æqualis a Igitur in primo termino y non erit ducendus in a, sed in ejus valorem, & fiet $\frac{yzz + ybd}{d}$, cui addondo bd, & reducendo ad eandem denominationem, fiet $\frac{yzz + ybd + bdd}{d}$ æquandus quadrato: ductísque

que tùm numeratore, tùm denominatore in d, habebitur $\frac{yzzd + ybdd + bddd}{dd}$ æquandus quadrato. At denominator quadratus est, igitur sufficiet æquare quadrato numeratorem $yzzd + ybdd + bddd$. Quia verò zz ad libitum sumptum est, substituatur ejus loco, dd, fiétque $yddd + ybdd + bddd$, divisisque omnibus per quadratum dd, relinquetur $yd + yb + bd$, ut suprà, quadrato æquandus. Est verò $yd + yb$ idem quod y in $d + b$. Ergo ut solvatur Problema propositum, infertur, *inveniendum esse triangulum rectangulum, in quo hypotenusa ducatur in summam laterum circa rectum; & producto addatur duplum areæ, ut fiat summa æquanda quadrato.* Hoc autem factum est in Problemate secundo Capitis primi, primæ Partis.

EXEMPLUM III.

Propoſuimus in ſecundi Capitis Problemate primo, Partis prioris; Invenire triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenuſâ in unum latus circa rectum, detractus ſingulis lateribus, faciat quadratos.

VT inveniatur methodus tenenda in ſolutione hujus quæſtionis, pono triangulum ſpecie *y. b. d.* & triangulum quæſitum $\frac{y}{a}$. $\frac{b}{a}$. $\frac{d}{a}$. Productus itaque ex hypotenuſâ in unum latus erit $\frac{yd}{aa}$, qui detractus ex duobus prioribus lateribus relinquet $\frac{y}{a} - \frac{yd}{aa}$ & $\frac{b}{a}\ \frac{yd}{aa}$, æquandos quadrato. Et reductis illis ad eundem denominatorem, erunt $\frac{ya - yd}{aa}$ & $\frac{ba - yd}{aa}$ æquandi quadratis. Et quoniam denominator eſt quadratus, ſufficiet æquare quadratis duos numeratores $ya - yd$ & $ba - yd$. Cape primum terminum $ya - yd$, & illum æqua quadrato zz (loco illius potes ſumere quemcunque alium.) Igitur per metatheſim

sim $zz + yd$ æquantur ya, divisisque omnibus per y, erit a æqualis $\frac{zz + yd}{y}$. Perge posteà ad secundum terminum $ba - yd$, & quià reperitur illic ba, duces b non jam ampliùs in a, sed in ejus valorem mox inventum, ut fiat $\frac{bzz + byd}{y}$, unde tolles yd (ut postulat secunda particula) & residuum erit $\frac{bzz + byd - yyd}{y}$: ductóque tùm numeratore tùm denominatore in y, extabit $\frac{bzzy + byyd - yyyd}{yy}$ æquandus quadrato. At denominator quadratus est à latere y: igitur satis erit æquare quadrato numeratorem: In isto autem numeratore reperitur quadratum zz, huic substitue quadratum yy, & fiet $byyy + byyd - yyyd$ æquandus quadrato, divisisque omnibus per yy, erit $by + bd - yd$ æquandus quadrato. Vnde inferes ad enodationem Problematis propositi, *inveniendum esse triangulum rectangulum, in quo secundum latus ducatur in summam extremorum, & ex producto tollendum productum sub extremis, itaut residuum æquetur quadrato.*

Idem autem prorsùs concludetur, si sumantur $ba - yd$ & $da - yd$. Postremum enim terminum si æques quadrato zz sumpto ad libitum, erit per metathesim da æqualis $zz + yd$, divisáque utráque æquationis parte

 per

per d, fiet a æqualis $\frac{zz + yd}{d}$. Quare pergendo ad primum terminum $ba - yd$, duces b non jam ampliùs in a, sed in ejus valorem mox repertum, ut fiat $\frac{bzz + byd}{d}$. Hinc tolle yd, & habebis $\frac{bzz + byd - ydd}{d}$. ductóque tùm numeratore, tùm denominatore in d, fiet $\frac{bzzd + bydd - yddd}{dd}$ æquandus quadrato. Igitur cùm denominator sit quadratus, satis erit æquare quadrato numeratorem $bzzd + bydd - yddd$. In locum zz sumpti pro libito, substitue dd, eritque $bddd + bydd - yddd$ quadrato æquandus: divisísque omnibus per dd, fiet idem numerus, qui suprà $bd + by - yd$. Vnde elicies eandem conclusionem, videlicèt ad enodationem Problematis, *inveniendum esse triangulum rectangulum, in quo secundum latus ducatur in summam extremorum, & ex producto tollatur productus sub extremis, itaut residuum æquetur quadrato.* Hoc autem factum est in Problemate primo secundi Capitis, primæ Partis.

EXEM

EXEMPLVM IV.

Esto inveniendum triangulum rectangulum, in quo productus ex hypotenusâ in unum latus circa rectum, multatus uno latere, additus verò reliquis, faciat quadratos.

SIt triangulum specie $y. b. d.$ cujus singula latera dividantur per a, ut sit triangulum quæsitum $\frac{y}{a}. \frac{b}{a}. \frac{d}{a}.$ & sumatur productus sub extremis, ut addatur duobus prioribus lateribus, & fiant quadrati $\frac{y}{a} + \frac{yd}{aa}$. & $\frac{b}{a} + \frac{yd}{aa}$. seu post reductionem, $\frac{ya + yd}{aa}$ & $\frac{ba + yd}{aa}$. Aut etiam, quia denominator est quadratus, soli numeratores $ya + yd$ & $ba + yd$. Cape priorem terminum $ya + yd$, & illum æqua zz. Igitur per metathesim, ya æquatur $zz - yd$: & dividendo utramque æquationis partem per y, fit a æqualis $\frac{zz - yd}{y}$. Ergo $ba + yd$ erit $\frac{bzz - ydb - yyd}{y}$: ductóque tàm numeratore, quàm denominatore in y, habebitur

tur $\frac{bzzy - yydb + yyyd}{yy}$ æquandus quadrato, imò & solus numerator (quia denominator quadratus est à latere y;) & quoniam zz sumptum est ad libitum, substituatur illi yy, & fiet $byyy + yydb + yyyd$ quadrato æquandus: divisisque omnibus per yy, extabit tandem $by - db + yd$ æquandus quadrato. Igitur cùm y sit hypotenusa, $by - db$ idem erit ac productus b in $y - d$. Quare inde concludes ad enodationem Problematis, *inveniendum esse triangulum rectangulum, in quo medium latus ducatur in differentiam extremorum, & huic producto addatur productus extremorum, ac summa facta æquetur quadrato.* Hoc autem factum est in Problemate secundo Capitis secundi, primæ Partis.

Sed & hoc idem inferetur ex altero postulato, petitur enim ut productus sub extremis multatus tertio latere, relinquat quadratum. Igitur $\frac{yd}{aa} - \frac{d}{a}$ quadrato æquandus est cum $\frac{b}{a} + \frac{yd}{aa}$, seu post reductionem $\frac{yd - da}{aa}$ & $\frac{ba + yd}{aa}$. sive abjecto denominatore quadrato, soli numeratores $yd - da$ & $ba + yd$ sunt quadratis æquandi. Ordire à primo, & illum æqua zz. Igitur post metathesim $zz + da$ æquatur yd; & yd

$- zz$

$-zz$ æquatur da, & dividendo utranque partem æquationis per d, fiet a æqualis $\frac{yd - zz}{d}$. Hinc itaque perges ad secundum terminum $ba + yd$, ubi vides b, duci in a, quare duces b in valorem a, & addes yd, fiétque $\frac{byd - bzz + ydd}{d}$: & ducto numeratore ac denominatore in d, habebis $\frac{bydd - bzzd + yddd}{dd}$, abjectóque denominatore, ut jam suprà monuimus non semel, solus numerator æquandus erit quadrato: & substituto dd in locum zz ad libitum sumpti, extabit $bydd - bddd + yddd$ quadrato æquandus, divisisque omnibus per dd, relinquetur idem omninò quod supra $by - bd + yd$ æquandum quadrato. Hinc igitur rursùs elicies eandem conclusionem, videlicèt ad enodationem Problematis propositi, *inveniendum esse triangulum rectangulum, & capiendam differentiam hypotenusæ & unius lateris circa rectum, eamque ducendam in alterum latus circa rectum, & huic producto addendum productum sub hypotenusâ, & priori latere, ut summa æquetur quadrato.* Hoc autem totum effectum est in Capitis secundi Problemate tertio, primæ Partis.

EXEMPLVM V.

Si propositum sit invenire triangulum rectangulum, in quo dupla area detracta hypotenusæ, & addita majori lateri circa rectum, & multata minore, faciat quadratos.

POnes triangulum specie $y.\ b.\ d.$ & triangulum quæsitum $\frac{y}{a}.\ \frac{b}{a}.\ \frac{d}{a}.$ Erit ergo dupla area $\frac{bd}{aa}$. Igitur $\frac{y}{a} - \frac{bd}{aa}$. & $\frac{b}{a} + \frac{bd}{aa}$ & $\frac{bd}{aa} - \frac{d}{a}$ æquabuntur quadratis, ac post reductionem ad eundem denominatorem, & abjectionem denominatoris quadrati, erunt $ya - bd.\ ba + bd.\ bd - da.$ quadrato æquandi. Sumamus duos priores terminos $ya - bd$, & $ba + bd$, ordiamúrque ab æquatione termini posterioris, ac illum æquemus quadrato ad libitum sumpto zz. Ergò post metathesim ba æquabitur $zz - bd$, & dividendo utramque æquationis partem per b, fiet a æqualis $\frac{zz - bd}{b}$. Hinc pergendum ad termini prioris $ya - bd$ æquationem, & y ducendum in valorem a,

non

non autem in a, ut fiat $\frac{yzz - ybd - bbd}{b}$, ductísque numeratore & denominatore in b, abjectóque denominatore quadrato, habebitur $yzzb - ybbd - bbbd$ quadrato æquandus; seu (bb substituto in locum zz) $ybbb - ybbd - bbbd$. Igitur divisis omnibus per bb, fiet $yb - yd - bd$ quadrato æquandus. Vnde statim inferes ad enodationem Problematis propositi, *inveniendum esse triangulum rectangulum, in quo differentia laterum circa rectum duci debet in hypotenusam, & ex producto tolli duplum areæ, & residuum quadrato æquandum.*

Non aliter idem inferes ex duobus terminis posterioribus $ya - bd$ & $bd - da$: nam si æques $bd - da$ quadrato zz, post debitam metathesim, fiet $bd - zz$ æqualis da. Ergo dividendo utramque partem æquationis per d, fiet a æqualis $\frac{bd - zz}{d}$. Hinc perge ad alium terminum $ya - bd$: & quoniam deprenditur ya in priori particulâ, non ampliùs duces y in a, sed in ejus valorem inventum, ut fiat $\frac{ybd - zzy - bdd}{d}$. ductóque tùm numeratore tùm denominatore in d, ac relicto denominatore quadrato, substitutóque dd in locum zz, divisísque omnibus per dd, fiet tandem quotiens

$yb - yd - bd$, idem omninò, qui suprà. Vnde rursùs idem inferes. Hoc autem effectum est in Problemate septimo Capitis primi, primæ Partis.

EXEMPLVM VI.

Proponatur inveniendum triangulum rectangulum, in quo areâ detractâ hypotenusæ, & uni lateri circa rectum, & dimidio tertii lateris, relinquantur quadrati.

SIt triangulum specie $y.\ b.\ d.$ Ergo area $\frac{bd}{2}$, & triangulum quæsitum $\frac{y}{a}.\ \frac{b}{a}.\ \frac{d}{a}.$ Igitur area $\frac{bd}{2aa}$. subtracta ex duobus prioribus lateribus, & dimidio tertii, exhibet $\frac{y}{a} - \frac{bd}{2aa}.\ \frac{b}{a} - \frac{bd}{2aa}.\ \frac{d}{a} - \frac{bd}{2aa}.$ Et reducendo ad eandem denominationem, ac tollendo denominatorem quadratum, fient $ya - \frac{bd}{2}.\ ba - \frac{bd}{2}.\ \frac{da}{2} - \frac{bd}{2}$ æquandi quadratis. Capio duos priores terminos, & posteriorem ex illis æquo quadrato zz, ita per metathesim $zz + \frac{bd}{2}$ æquatur ba. & fit a æqualis $\frac{zz}{b} + \frac{d}{2}$. Pergo deinde ad priorem

priorem terminum, qui est $ya - \frac{bd}{2}$, & duco y non ampliùs in a, sed in ejus valorem, ut fiat $\frac{yzz}{b} + \frac{dy}{2}$ unde tollo dimidium bd, & fit $\frac{yzz}{b} + \frac{dy}{2} - \frac{bd}{2}$ æquandus quadrato, seu substituendo bb in locum zz, fit $yb + \frac{dy}{2} - \frac{bd}{2}$, æquandus quadrato. Vnde inferes *hypotenusam* y *ducendam esse in latus* b, *& dimidium tertii lateris, & ex eo producto tollendam aream, & residuum debere quadrato æquari.* Hoc autem factum est in Problemate duodecimo, Capitis primi, primæ Partis.

Idem prorsùs concludetur accipiendo duos posteriores terminos $ya - \frac{bd}{2}$, & $da - \frac{bd}{2}$, nam si æques $da - \frac{bd}{2}$ cuilibet quadrato, putà zz, per metathesim, fiet $zz + \frac{bd}{2}$ æqualis da, & dividendo utramque partem æquationis per d, erit a æqualis $\frac{zz}{d} + \frac{bd}{2d}$. & substituto dd in locum zz, erit $d + \frac{b}{2}$ æqualis a. Igitur $ya - \frac{bd}{2}$ (quæ est altera pars æquationis) erit æqualis $yd + \frac{yb}{2} - \frac{bd}{2}$, quam oportet æquare quadrato. *Proindéque cùm* y *sit hypotenusa, debet illa duci in unum latus circa rectum, plus dimidio alterius, & ex ejusmodi producto tolli area, & residuum æquari quadrato, ut enodetur Problema propositum.* Hoc autem effectum est Probl.

Problem. 12. Cap. 1. primæ Partis.

Possem ad alia Problemata progredi, & per viam Analyseos Speciosæ, ostendere quæ sit tenenda methodus, ad difficillimarum quæstionum solutionem. Verùm hæc satis sunto, præsertim cùm quilibet marte proprio, possit alia plurima excogitare.

FINIS.